Moca B2

v1.00

Kevin DEHLINGER
http://dev.pulsed.net/wp

2007

Table des matières

Chapitre 1 : Programmation linéaire

1) Exemple

Un transporteur dispose d'un camion dans lequel il peut charger au maximum, soit 2 tonnes, soit $4m^3$ de matériel.
Il peut transporter les marchandises M1 et M2 :

- M1 : $1000kg/m^3$
- M2 : $250kg/m^3$

Il facture le transport de M1 à 10€ la tonne et le transport de M2 à 24€ la tonne.

Il ne peut transporter qu'un volume de M2 inférieur ou égal à ($5m^3$ – 2*VolM1)

Questions:
Quel chargement optimal le transporteur doit-il emporter ?
Quel poids (ou volume) de M1 et M2 le transporteur doit il emporter pour que son bénéfice soit maximal ?

Il faut formaliser le problème sous la forme d'un programme linéaire.

Soient :

- P1 le poids de M1
- P2 le poids de M2
- V1 le volume de M1
- V2 le volume de M2

Les contraintes :
$P1 + P2 \leq 2$tonnes (1)
$V1 + V2 \leq 4m^3$ (2)
$V2 \leq 5m^3 - 2*V1$ (3)

Fonction économique z :
Max z = 10 P1 + 24 P2

Conversion des contraintes dans la même unité :
$P1 + P2 \leq 2$ (1)
$\frac{P1}{1} + \frac{P2}{0.25} \leq 4$ (2)
$\frac{P2}{0.25} \leq 5 - \frac{2P1}{1}$ (3)

Max z = 10 P1 + 24 P2

$P1 + P2 \leq 2$ (1)
$P1 + 4P2 \leq 4$ (2)
$2P1 + 4P2 \leq 5$ (3)

Max z = 10 P1 + 24 P2

<u>Programme linéaire :</u>

- Deux variables
- trois contraintes
- Une fonction économique à maximiser

<u>Forme générale :</u>

- Une fonction économique à maximiser
  Max $z = C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots + C_nx_n$
- m contraintes
  - $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n$ (1)
  - $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n$ (2)
  - …
  - $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n$ (m)

2) Méthode graphique

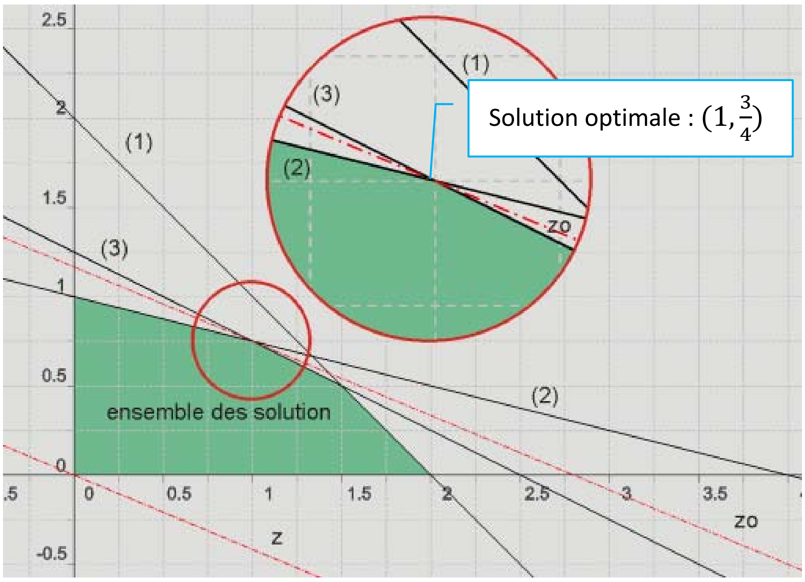
(1) $P2 = -P1 + 2$

(2) $P2 = -\frac{1}{4}P1 + 1$

(3) $P2 = -\frac{1}{2}P1 + \frac{5}{4}$

$z = 10P1 + 24P2$

$z = 0 \rightarrow P2 = -\frac{10}{24}P1$



solution optimale :
$P1 = 1$ et $P2 = \frac{3}{4} \rightarrow z = 28$

→ 1 tonne de P1, 750 kg de P2 → bénéfice 28€

3) Méthode algébrique

En utilisant le même exemple

$x_1 + x_2 \leq 2$ (1)
$x_1 + 4x_2 \leq 4$ (2)
$2x_1 + 4x_2 \leq 5$ (3)

Max z = 10x_1 + 24 x_2
On sait que la solution se trouve en un sommet du polygone (cf. résolution graphique)

Le principe de la résolution algébrique :

- Enumération de l'ensemble des sommets du polygone
- Calcul de la valeur de la fonction économique en ces sommets
- On garde la valeur maximale de la fonction économique

Pour déterminer les sommets il faut introduire des variables d'écart :
$x_1 \leq 2$ ➔ $x_1 + x_2 = 2$ avec $x_2 \geq 0$
$x_1 \geq 2$ ➔ $x_1 - x_2 = 2$ avec $x_2 \geq 0$

$x_1 + x_2 + x_3 = 2$ (1)
$x_1 + 4x_2 + x_4 = 4$ (2)
$2x_1 + 4x_2 + x_5 = 5$ (3)

$x_3\ x_4\ x_5$ ➔ Variables d'écart
$x_1\ x_2$ ➔ Variables principales

Si $x_3 = 0$, la solution se trouve sur $x_1 + x_2 = 2$
Si $x_5 = 0$, la solution se trouve sur $2x_1 + 4x_2 = 5$
Donc si $x_3 = 0$ et $x_5 = 0$, la solution se trouve à l'intersection de $x_1 + x_2 = 2$ et de $2x_1 + 4x_2 = 5$

Pour obtenir un sommet du polygone il fait annuler 2 des 5 variables de la forme standard.

n=2 ➔ nombre de variables principales
m=3 ➔ nombre de variables d'écart

La solution obtenue est appelée solution de base.

$x_3 = 0 \quad x_5 = 0$
➔ $x_2 = \frac{1}{2} \quad x_1 = \frac{3}{2} \quad x_4 = \frac{1}{2} \quad z = 27$

Solution de base admissible car $\forall\, i,\ x_i \geq 0$ ➔ sommet du polygone

$x_1 = 0 \quad x_5 = 0$
➔ $x_2 = \frac{5}{4} \quad x_3 = \frac{3}{4} \quad x_4 = -1 \quad z = 30$

Solution de base non admissible car $x_4 < 0$ ➔ cela ne correspond pas à un sommet du polygone

Algorithme :

1) déterminer toutes les solutions de base admissibles, annuler n variables sur les n+m variables avec $\forall\, i,\ x_i \geq 0$ ➔ sommet du polygone

2) Calculer z

3) Garder la valeur max

Calcul du nombre de solutions de base :

$$C_{n+m}^{n} = \frac{(n+m)!}{n!\,m!}$$

Si n=2 et m=6 comme dans cet exemple il y a 10 solutions de base
n=6, m=6 ➔ 924 solutions de base
…

4) Méthode algébrique du simplexe

En utilisant le même exemple

$x_1 + x_2 \leq 2$ (1)
$x_1 + 4x_2 \leq 4$ (2)
$2x_1 + 4x_2 \leq 5$ (3)

Max z = $10x_1$ + 24 x_2

Introduction des variables d'écart :

$x_1 + x_2 + x_3 = 2$ (1)
$x_1 + 4x_2 + x_4 = 4$ (2)
$2x_1 + 4x_2 + x_5 = 5$ (3)

$10x_1 + 24x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = z$

Solution évidente :
$x_1 = 0 \quad x_2 = 0$
→calcul des autres variables
$x_3 = 2 \quad x_4 = 4 \quad x_5 = 5 \quad z = 0$

On veut augmenter z (z = $10x_1$ + 24 x_2) :

- On choisit d'augmenter x_1 ou x_2, dans ce cas on augmentera x_2 car la dérivée partielle est plus importante (24>10)
- On pose $x_2 = \theta$ et $x_1 = 0$
  La nouvelle solution doit être une solution de base admissible c'est-à-dire $\forall\, i,\ x_i \geq 0$

<u>Résolution :</u>

$$\left|\begin{array}{l} x_3 \geq 0 \\ x_4 \geq 0 \\ x_5 \geq 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left|\begin{array}{l} x_3 = 2-\theta \\ x_4 = 4-4\theta \\ x_5 = 5-4\theta \end{array}\right. \Longrightarrow \left|\begin{array}{l} 2-\theta \geq 0 \\ 4-4\theta \geq 0 \\ 5-4\theta \geq 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left|\begin{array}{l} \theta \leq 2 \\ \theta \leq 1 \\ \theta \leq \frac{5}{4} \end{array}\right.$$

$$\theta = \min\left(2,1,\frac{5}{4}\right) = 1$$

<u>La nouvelle solution:</u>
$x_1 = 0 \quad x_2 = 1$
→calcul des autres variables
$x_3 = 1 \quad x_4 = 0 \quad x_5 = 1 \quad z = 24$

On veut augmenter z, pour cela il faut augmenter les variables x_1 ou x_4 (celles qui sont égales à 0)
On doit exprimer z en fonction de x_1 et x_4, pour cela on utilise la deuxieme contrainte (la seule qui contient x_1 et x_4)

$$x_2 = 1 - \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_4$$

$$z = 10x_1 + 24 - 6x_1 - 6x_4$$
$$z - 24 = 4x_1 - 6x_4$$

➔ $4x_1 + 0x_2 + 0x_3 - 6x_4 + 0x_5 = z - 24$

$\frac{3}{4}x_1 + x_3 - \frac{1}{4}x_4 = 1$ (1)

$\frac{1}{4}x_1 + x_2 + \frac{1}{4}x_4 = 1$ (2)

$x_1 - x_4 + x_5 = 1$ (3)

On augmente x_1 car $4 > -6$

On pose : $x_1 = \theta \quad x_4 = 0 \quad \forall\, i,\ x_i \geq 0$

$$\left|\begin{array}{l} x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \\ x_5 \geq 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left|\begin{array}{l} 1-\frac{1}{4}\theta \geq 0 \\ 1-\frac{3}{4}\theta \geq 0 \\ 1-\theta \geq 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left|\begin{array}{l} \theta \leq 4 \\ \theta \leq \frac{4}{3} \\ \theta \leq 1 \end{array}\right.$$

$$\theta = \min\left(4,\frac{4}{3},1\right) = 1$$

<u>La nouvelle solution:</u>
$x_1 = 1 \quad x_4 = 0$
→calcul des autres variables
$x_2 = \frac{3}{4}\ x_3 = \frac{1}{4}\ \ x_5 = 0 \quad z = 28$

On exprime z en fonction de x_4 et x_5 (les variables nulles) ; pour cela on utilise la 3eme contrainte.
$x_1 - x_4 + x_5 = 1$
$x_1 = 1 + x_4 - x_5$

$z - 24 = 4 + 4x_4 - 4x_5 - 6x_4$
$z - 28 = -2x_4 - 4x_5$

→ $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 - 2x_4 - 4x_5 = z - 28$

$x_3 + \frac{1}{2}x_4 - \frac{3}{4}x_5 = \frac{1}{4}$ (1)

$x_2 + \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{4}x_5 = \frac{3}{4}$ (2)

$x_1 - x_4 + x_5 = 1$ (3)

Comme les coefficients de x_4 et x_5 sont négatifs dans l'équation $z = f(x_4, x_5)$ on ne peut plus augmenter z.
La solution est donc :
$x_1 = 1$
$x_2 = \frac{3}{4}$
$z = 28$

5) La méthode des tableaux du simplexe

$x_1 + x_2 \leq 2$ (1)
$x_1 + 4x_2 \leq 4$ (2)
$2x_1 + 4x_2 \leq 5$ (3)

Max z = $10x_1$ + 24 x_2

Introduction des variables d'écart :

$x_1 + x_2 + x_3 = 2$ (1)
$x_1 + 4x_2 + x_4 = 4$ (2)
$2x_1 + 4x_2 + x_5 = 5$ (3)

$10x_1 + 24x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = z$

C_i	i	$\overbrace{x_1}^{\text{Vecteurs hors}}$	$\overbrace{x_2}^{\text{base}}$	$\overbrace{x_3}^{\text{Vecteurs de}}$	$\overbrace{x_4}^{\text{base}}$	x_5		
0	3	1	1	1	0	0	2	
0	4	1	4	0	1	0	4	
0	5	2	4	0	0	1	5	
	C_j	10	24	0	0	0		
	Sol	0	0	2	4	5		
	Δj	10	24	0	0	0	0	z

1ere règle : Choisir l'indice j du vecteur colonne qui entre dans la base tel que Δ_j soit le plus grand positif possible.

$\Delta_1 = 10$
$\Delta_2 = 24$
➔ $\Delta_2 = 24$ est le plus grand → j=2

Le vecteur colonne 2 entre dans la base.
2eme règle : Choisir l'indice i du vecteur colonne qui sort de la base tel que i corresponde la valeur minimale (toujours positive) des rapports de la forme $\frac{x_i}{a_{ij}}$ (j étant le j de la 1ere règle)

$$\frac{x_3}{a_{32}} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{x_4}{a_{42}} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\frac{x_5}{a_{52}} = \frac{5}{4} = 1{,}25$$

Le vecteur colonne 4 sort de la base (i=4).

C_i	i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
0	3	$\frac{3}{4}$	0	1	$\frac{1}{4}$	0	1	ligne[3]-(ligne[4] :4)
24	2	$\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{4}$	0	1	ligne[4] :4
0	5	1	0	0	-1	1	1	ligne[5]-4*(ligne[4] :4)
	C_j	10	24	0	0	0		
	Sol	0	1	1	0	1		
	Δj	4	0	0	-6	0	24	z :ligne[Δj]-24*(ligne[4] :4)

Règle 1 :
$\Delta_1 = 4$
$\Delta_4 = -6$
➔ $\Delta_1 = 4$ est le plus grand → j=1

Règle 2:

$$\frac{x_3}{a_{31}} = \frac{1}{3/4} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{x_2}{a_{21}} = \frac{1}{1/4} = 4$$

$$\frac{x_5}{a_{51}} = \frac{1}{1} = 1$$

Le vecteur colonne 5 sort de la base (i=5).

C_i	i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
0	3	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	ligne[3]-(ligne[5] :$^4/_3$)
24	2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	ligne[2]-(ligne[5] :4)
10	1	1	0	0	-1	1	1	ligne[5]
	C_j	10	24	0	0	0		
	Sol	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0		
	Δj	0	0	0	-2	-4	28	z :ligne[Δj]- 4*ligne[5]

$x_1 = 1$

$x_2 = \frac{3}{4}$

$z = 28$

6) utilisation de variables artificielles

$x_1 + x_2 \leq 2$ (1)
$x_1 + 4x_2 \leq 4$ (2)
$2x_1 + 4x_2 \leq 5$ (3)
$x_1 + x_2 \geq \frac{1}{2}$ (4)

Max z = $10x_1$ + 24 x_2

<u>Introduction des variables d'écart :</u>

$x_1 + x_2 + x_3 = 2$ (1)
$x_1 + 4x_2 + x_4 = 4$ (2)
$2x_1 + 4x_2 + x_5 = 5$ (3)
$x_1 + x_2 - x_6 = \frac{1}{2}$ (4)

$10x_1 + 24x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 = z$

$x_1 = 0$ $x_3 = 2$ $x_5 = 5$

$x_2 = 0$ $x_4 = 4$ $x_6 = -\frac{1}{2}$

➔ Cette solution de base n'est pas admissible

Pour trouver une solution de base admissible on introduit une variable artificielle (x_7)

$x_1 + x_2 + x_3 = 2$ (1)
$x_1 + 4x_2 + x_4 = 4$ (2)
$2x_1 + 4x_2 + x_5 = 5$ (3)
$x_1 + x_2 - x_6 + x_7 = \frac{1}{2}$ (4)

$10x_1 + 24x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 - Mx_7 = z$ (avec M≫0)

$x_1 = 0$ $x_3 = 2$ $x_5 = 5$ $x_7 = \frac{1}{2}$

$x_2 = 0$ $x_4 = 4$ $x_6 = 0$ $z = -\frac{1}{2}M$

C_i	i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		
0	3	1	1	1	0	0	0	0	2	
0	4	1	4	0	1	0	0	0	4	
0	5	2	4	0	0	1	0	0	5	
-M	7	1	1	0	0	0	-1	1	$^1/_2$	
	C_j	10	24	0	0	0	0	-M		
	Sol	0	0	2	4	5	0	$^1/_2$		
	Δj	10+M	24+M	0	0	0	-M	0	$-^1/_2$M	z

<u>1</u>

1ere règle :

24+M > 10+M

➔ 2 rentre en base

2eme règle :

$\frac{1/2}{1}$ est le plus petit $\frac{x_i}{a_{i2}}$ ➔ 7 sort de la base

C_i	i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		
0	3	0	0	1	0	0	1	-1	$^3/_2$	
0	4	-3	0	0	1	0	4	-4	2	
0	5	-2	0	0	0	1	4	-4	3	
24	2	1	1	0	0	0	-1	1	$^1/_2$	
	C_j	10	24	0	0	0	0	-M		
	Sol	0	$^1/_2$	$^3/_2$	2	3	0	0		
	Δj	-14	0	0	0	0	-M	-M-24	12	z

$\Delta_7 = -M - 24$ soit une valeur largement négative et donc nous pouvons à présent nous passer d'x_7

1ere règle :

➔ 6 rentre en base

2eme règle :

➔4 sort de la base

C_i	i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
0	3	$^3/_4$	0	1	$-^1/_4$	0	0	1	
0	6	$-^3/_4$	0	0	$^1/_4$	0	1	$^1/_2$	
0	5	1	0	0	-1	1	0	1	
24	2	$^1/_4$	1	0	$^1/_4$	0	-1	1	
	C_j	10	24	0	0	0	0		
	Sol	0	1	1	0	1	$^1/_2$		
	Δj	4	0	0	-6	0	0	24	z

<u>1^ere règle :</u>
➔ 1 rentre en base

<u>2^eme règle :</u>
➔5 sort de la base

C_i	i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	3	0	0	1	$1/2$	$-3/4$	0	$1/4$
0	6	0	0	0	$-1/2$	$3/4$	1	$5/4$
0	1	1	0	0	-1	1	0	1
24	2	0	1	0	$1/2$	$-1/4$	0	$3/4$
	C_j	10	24	0	0	0	0	
	Sol	1	$3/4$	$1/4$	0	1	$5/4$	
	Δj	0	0	-2	-4	0	0	28 z

$x_1 = 1$

$x_2 = \frac{3}{4}$

$z = 28$

7) Problème dual d'un programme linéaire

a) Introduction

<u>Problème primal :</u>
$Max\ z = C_1x_1 + C_2x_2 + \cdots + C_nx_n$

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq B_1$ (1)
$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq B_2$ (2)
…
$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq B_m$ (m)

$\forall i \in [1, n]: x_i \geq 0$

- Maximisation de z
- Contraintes $\leq$

Problème dual :

$Min\ z' = B_1u_1 + B_2u_2 + \cdots + B_nu_n$

$a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \cdots + a_{m1}u_m \geq C_1$ (1)
$a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \cdots + a_{m2}u_m \geq C_2$ (2)
…
$a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \cdots + a_{mn}u_m \geq C_n$ (n)

$\forall i \in [1, n]: u_i \geq 0$

- minimisation de z'
- Contraintes $\geq$

Exemple :

Problème Primal :

$Max\ z = 14x_1 + 17x_2 + 12x_3$

$x_1 + x_2 + x_3 \leq 40$ (1)
$10x_1 + 12x_2 + 7x_3 \leq 420$ (2)
$6x_1 + 9x_2 + 5x_3 \leq 280$ (3)

Problème dual :

$Min\ z' = 40u_1 + 420u_2 + 280u_3$

$u_1 + 10u_2 + 6u_3 \geq 14$ (1)
$u_1 + 12u_2 + 9u_3 \geq 17$ (2)
$u_1 + 7u_2 + 5u_3 \geq 12$ (3)

b) Résolution du problème dual par la méthode du simplexe

Introduction de variables d'écart :

$u_1 + 10u_2 + 6u_3 - u_4 = 14$ (1)
$u_1 + 12u_2 + 9u_3 - u_5 = 17$ (2)
$u_1 + 7u_2 + 5u_3 - u_6 = 12$ (3)

$Max - z' = -40u_1 - 420u_2 - 280u_3 + 0u_4 + 0u_5 + 0u_6$

Solution évidente :

$u_1 = 0$ $u_4 = -14$
$u_2 = 0$ $u_5 = -17$
$u_3 = 0$ $u_6 = -12$

$z = 0$

Ce n'est pas une solution de base admissible car $u_4, u_5, u_6 < 0$

Introduction de variables artificielles:

$u_1 + 10u_2 + 6u_3 - u_4 + u_7 = 14$ (1)
$u_1 + 12u_2 + 9u_3 - u_5 + u_8 = 17$ (2)
$u_1 + 7u_2 + 5u_3 - u_6 + u_9 = 12$ (3)

$-z' = -40u_1 - 420u_2 - 280u_3 + 0u_4 + 0u_5 + 0u_6 - Mu_7 - Mu_8 - Mu_9$

C_i	i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9		
-M	7	1	10	6	-1	0	0	1	0	0	14	
-M	8	1	12	9	0	-1	0	0	1	0	17	
-M	9	1	7	5	0	0	-1	0	0	1	12	
	C_j	-40	-420	-280	0	0	0	-M	-M	-M		
	Sol	0	0	0	0	0	0	14	17	12		
	Δj	$-40+3M$	$-420+29M$	$-280+20M$	-M	-M	-M	0	0	0	$-43M$	$-z'$

Apres un certain nombre d'itérations :

C_i	i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
-40	1	1	0	0	$3/7$	$8/7$	$-18/7$	$38/7$	
-420	2	0	1	0	$-4/7$	$1/7$	$3/7$	$3/7$	
-280	3	0	0	1	$5/7$	$-3/7$	$-2/7$	$5/7$	
	C_j	-40	-420	-280	0	0	0		
	Sol	$38/7$	$3/7$	$5/7$	0	0	0		
	Δj	0	0	0	$-160/7$	$-100/7$	$-20/7$	$-4180/7$	$-z'$

c) Passage du tableau final du problème dual au tableau final du problème primal

C_i	i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
-40	1	1	0	0	$3/7$	$8/7$	$-18/7$	$38/7$	
-420	2	0	1	0	$-4/7$	$1/7$	$3/7$	$3/7$	
-280	3	0	0	1	$5/7$	$-3/7$	$-2/7$	$5/7$	
	C_j	-40	-420	-280	0	0	0		
	Sol	$38/7$	$3/7$	$5/7$	0	0	0		
	Δj	0	0	0	$-160/7$	$-100/7$	$-20/7$	$-4180/7$	$-z'$

Colonnes du dual

Lignes du dual

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	S	
u_1	-1	0	0	$-3/7$	$-8/7$	$+18/7$	$-38/7$	x_4
u_2	0	-1	0	$+4/7$	$-1/7$	$-3/7$	$-3/7$	x_5
u_3	0	0	-1	$-5/7$	$+3/7$	$+2/7$	$-5/7$	x_6
u_4	0	0	0	1	0	0	0	x_1
u_5	0	0	0	0	1	0	0	x_2
u_6	0	0	0	0	0	1	0	x_3
Δj	0	0	0	$+160/7$	$+100/7$	$+20/7$	$+4180/7$	$+z'$
	x_4	x_5	x_6	x_1	x_2	x_3		

Colonnes du primal

Lignes du primal

Il faut multiplier les lignes du dual dont le Δj = 0 et la ligne des Δj par -1.

Les règles de transformations :

- variables d'écart du problème dual ↔ variables principales du problème primal
- variables principales du problème dual ↔ variables d'écart du problème primal
- lignes du problème dual ↔ colonnes du problème primal
- colonnes du problème dual ↔ lignes du problème primal
- Δj du problème dual ↔ solutions du problème primal
- solutions du problème dual ↔ Δj du problème primal
- z' du problème dual ↔ z du problème primal

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	S	
x_1	1	0	0	$-3/7$	$4/7$	$-5/7$	$160/7$	
x_2	0	1	0	$-8/7$	$-1/7$	$3/7$	$100/7$	
x_3	0	0	1	$18/7$	$-3/7$	$2/7$	$20/7$	
x_4	0	0	0	-1	0	0	0	
x_5	0	0	0	0	-1	0	0	
x_6	0	0	0	0	0	-1	0	
Δj	0	0	0	$-38/7$	$-3/7$	$-5/7$	$4180/7$	z

De là, nous pouvons en déduire le tableau final

C_i	i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
14	1	1	0	0	$-3/7$	$4/7$	$-5/7$	$160/7$	
17	2	0	1	0	$-8/7$	$-1/7$	$3/7$	$100/7$	
12	3	0	0	1	$18/7$	$-3/7$	$2/7$	$20/7$	
	C_j	14	17	12	0	0	0		
	Sol	$160/7$	$100/7$	$20/7$	0	0	0		
	Δj	0	0	0	$-38/7$	$-3/7$	$-5/7$	$4180/7$	z

$x_1 = 160/7$
$x_2 = 100/7$
$x_3 = 20/7$

$z = 4180/7$

8) Programmation linéaire paramétrée

a) Paramétrage des coefficients de la fonction économique

$Max\ z = 14x_1 + 17x_2 + 12x_3$

$x_1 + x_2 + x_3 \leq 40$ (1)
$10x_1 + 12x_2 + 7x_3 \leq 420$ (2)
$6x_1 + 9x_2 + 5x_3 \leq 280$ (3)

Comment évolue la solution lorsque le coefficient de la variable x_3 varie dans la fonction économique ?

$Max\ z = 14x_1 + 17x_2 + C_3x_3$

Avec $C_3 = 12(1+\lambda)$ avec $\lambda \in [-1; +\infty[$ ➔ $C_3 \in [0; +\infty[$
Tableau final :

C_i	i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
14	1	1	0	0	$-3/7$	$4/7$	$-5/7$	$160/7$	
17	2	0	1	0	$-8/7$	$-1/7$	$3/7$	$100/7$	
$12(1+\lambda)$	3	0	0	1	$18/7$	$-3/7$	$2/7$	$20/7$	
	C_j	14	17	$12(1+\lambda)$	0	0	0		
	Sol	$160/7$	$100/7$	$20/7$	0	0	0		
	Δj	0	0	0	$-\frac{38}{7}-\frac{216}{7}\lambda$	$-\frac{3}{7}+\frac{36}{7}\lambda$	$-\frac{5}{7}-\frac{24}{7}\lambda$	$\frac{4180}{7}+\frac{240}{7}\lambda$	z

λ	-1	$-\frac{5}{24}$	$-\frac{19}{108}$	$\frac{1}{12}$	∞
$\Delta_4 = -\frac{38}{7}-\frac{216}{7}\lambda$		+	+	-	-
$\Delta_5 = -\frac{3}{7}+\frac{36}{7}\lambda$		-	-	-	+
$\Delta_6 = -\frac{5}{7}-\frac{24}{7}\lambda$		+	-	-	-
Décision		Soit VC4, soit VC6 rentre	VC4 rentre	Solution stable	VC5 entre dans la base

<u>1er cas :</u>

$\lambda \in \left[-1; -\frac{5}{24}\right[$

Règle 1 :

$\Delta_4 > 0$
$\Delta_5 < 0$
$\Delta_6 \geq 0$

$\Delta_4 > \Delta_6$

Règle 2 :

$$\frac{x_1}{a_{14}} = -\frac{160}{3}$$

$$\frac{x_2}{a_{24}} = -\frac{25}{2}$$

$$\frac{x_3}{a_{34}} = \frac{10}{9}$$

C_i	i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
14	1	1	0	$1/6$	0	$1/2$	$-2/3$	$70/3$
17	2	0	1	$4/9$	0	$-1/3$	$5/9$	$140/9$
0	4	0	0	$7/18$	1	$-1/6$	$1/9$	$10/9$
	C_j	14	17	$12(1+\lambda)$	0	0	0	
	Sol	$70/3$	$140/9$	0	$10/9$	0	0	
	Δj	0	0	$\frac{19}{9}+12\lambda$	0	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{9}$	$\frac{5320}{9}$ z

Sur l'intervalle $\lambda \in \left[-1; -\frac{5}{24}\right[$ les Δj sont tous ≤ 0 ➔ FIN

Solution :

$$x_1 = \frac{70}{3}$$

$$x_2 = \frac{140}{9}$$

$$x_3 = 0$$

$$z = \frac{5320}{9}$$

Réponses sans les développements pour les autres cas :

2eme cas :

$$\lambda \in \left]-\frac{5}{24}; -\frac{19}{108}\right]$$

Solution identique au premier cas

<u>3eme cas :</u>

$\lambda \in \left]-\frac{19}{108};\frac{1}{12}\right]$

La solution est stable sur cet intervalle

$x_1 = \frac{160}{7}$

$x_2 = \frac{100}{7}$

$x_3 = \frac{20}{7}$

$z = \frac{4180}{7} + \frac{240}{7}\lambda$

<u>4eme cas :</u>

$\lambda \in \left]\frac{1}{12};+\infty\right[$

<u>2 sous cas :</u>

$\lambda \in \left]\frac{1}{12};\frac{5}{12}\right]$

$x_1 = 0$

$x_2 = 20$

$x_3 = 20$

$z = 580 + 240\lambda$

$\lambda \in \left]\frac{5}{12};+\infty\right[$

$x_1 = 0$

$x_2 = 0$

$x_3 = 40$

$z = 480 + 480\lambda$

b) paramétrage des seconds membres des contraintes

$Max\ z = 14x_1 + 17x_2 + 12x_3$

$x_1 + x_2 + x_3 \leq 40$ (1)
$10x_1 + 12x_2 + 7x_3 \leq 420$ (2)
$6x_1 + 9x_2 + 5x_3 \leq 280$ (3)

On veut faire évoluer le membre de droite de la 3eme inéquation

$6x_1 + 9x_2 + 5x_3 \leq 280(1+\gamma)$ avec $\gamma \in [-1; +\infty[$

<u>Conversion en problème dual</u>

$Min\ z' = 40u_1 + 420u_2 + 280(1+\gamma)\ u_3$

$u_1 + 10u_2 + 6u_3 \geq 14$ (1)
$u_1 + 12u_2 + 9u_3 \geq 17$ (2)
$u_1 + 7u_2 + 5u_3 \geq 12$ (3)

<u>Tableau final du problème dual</u>

C_i	i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
-40	1	1	0	0	$^3/_7$	$^8/_7$	$-^{18}/_7$	$^{38}/_7$
-420	2	0	1	0	$-^4/_7$	$^1/_7$	$^3/_7$	$^3/_7$
$-280(1+\gamma)$	3	0	0	1	$^5/_7$	$-^3/_7$	$-^2/_7$	$^5/_7$

C_j	-40	-420	$-280(1+\gamma)$	0	0	0	
Sol	$^{38}/_7$	$^3/_7$	$^5/_7$	0	0	0	
Δj	0	0	0	$-\frac{160}{7} + 200\gamma$	$-\frac{100}{7} - 120\gamma$	$-\frac{20}{7} - 80\gamma$	$-\frac{4180}{7} - 200\gamma$
							$-z'$

γ	-1	$-\frac{5}{42}$	$-\frac{1}{28}$	$\frac{4}{35}$	∞
$\Delta_4 = -\frac{160}{7} + 200\gamma$		-	-	-	+
$\Delta_5 = -\frac{100}{7} - 120\gamma$		+	-	-	-
$\Delta_6 = -\frac{20}{7} - 80\gamma$		+	+	-	-
Décision		Soit VC5, soit VC6 rentre	VC6 rentre	Solution stable	VC4 entre dans la base

Développons le 4eme cas :

$\gamma \in \left[-\frac{4}{3}; +\infty\right[$

Règle 1 : VC4 rentre
Règle 2 : VC3 sort

C_i	i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
-40	1	1	0	$-{}^{3}/_{5}$	0	${}^{5}/_{7}$	$-{}^{12}/_{5}$	5
-420	2	0	1	${}^{4}/_{5}$	0	$-{}^{1}/_{5}$	${}^{1}/_{5}$	1
0	4	0	0	${}^{7}/_{5}$	1	$-{}^{3}/_{5}$	$-{}^{2}/_{5}$	1
	C_j	-40	-420	$-280(1+\gamma)$	0	0	0	
	Sol	5	1	0	1	0	0	
	Δj	0	0	$32-280\gamma$	0	-28	-12	-620 $-z'$

Dans l'intervalle $\gamma \in \left[-\frac{4}{3}; +\infty\right[$ tous les Δj sont ≤ 0, la solution est donc stable.

$-z = -620$ ➔ $z = 620$
$u_1 = 5$ ➔ $x_4 = 0$
$u_2 = 1$ ➔ $x_5 = 0$
$u_3 = 0$ ➔ $x_6 = -32 + 280\gamma$
$u_4 = 1$ ➔ $x_1 = 0$
$u_5 = 0$ ➔ $x_2 = 28$
$u_6 = 0$ ➔ $x_3 = 12$

γ: -1 $\quad -\frac{2}{7}$ $\quad -\frac{1}{7}$ $\quad -\frac{5}{42}$ $\quad -\frac{1}{28}$ $\quad \frac{4}{35}$ $\quad \infty$

$x_1 = 0$ $x_2 = 0$ $x_3 = 56 + 56\gamma$ $z = 672 + 672\gamma$	$x_1 = 80 + 280\gamma$ $x_2 = 0$ $x_3 = -40 - 280\gamma$ $z = 640 + 560\gamma$	$x_1 = \frac{80}{3} + 280\gamma$ $x_2 = \frac{40}{3} + \frac{280}{3}\gamma$ $x_3 = 0$ $z = 600 + 280\gamma$	$x_1 = \frac{160}{7} - 200\gamma$ $x_2 = \frac{100}{7} + 120\gamma$ $x_3 = \frac{20}{7} + 80\gamma$ $z = \frac{4180}{7} + 200\gamma$	$x_1 = 0$ $x_2 = 28$ $x_3 = 12$ $z = 620$

9) Programmation linéaire en nombres entiers

Les variables x_i prennent leurs valeurs dans $\mathbb{N}$

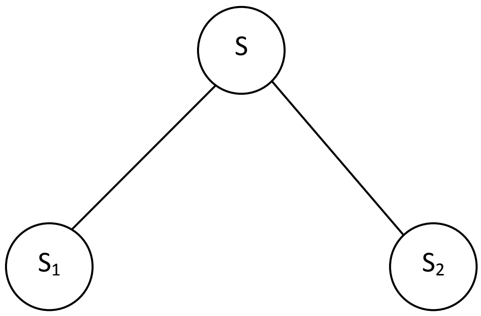
La méthode de séparation et évaluation

<u>Etape 1 : Résolution du programme linéaire</u>

- Résoudre le programme linéaire en relaxant les contraintes d'intégrité ($x_i \in \mathbb{R}$)
- Si la solution est entière → FIN
- Sinon aller à l'étape 2

<u>Etape 2 : Séparation</u>

- Choisir une variable x_k non-entière dans la solution optimale du programme linéaire (on prend celle avec la plus grande partie fractionnaire)
- Partager l'ensemble des solutions admissibles S en deux sous ensembles S_1 et S_2 selon
  $x_k = \widetilde{x_k} + f_k$ $\qquad \widetilde{x_k}$: partie entiere et f_k : partie fractionnaire



$x_k \le \widetilde{x_k}$ $\qquad\qquad$ $x_k \ge \widetilde{x_k} + 1$

<u>Etape 3 : Evaluation</u>

Pour chaque sous ensembles S_1 et S_2 on détermine la solution optimale (avec $x_i \in \mathbb{R}$)

On obtient deux solutions :

- Une solution z_1 pour $x_k \leq \widetilde{x_k}$
- Une solution z_2 pour $x_k \geq \widetilde{x_k} + 1$

<u>Etape 4 : Test</u>

- On examine la solution obtenue pour chaque sous ensemble S_1 et S_2
- On fige la solution si :
  - Le sous ensemble donne comme solution l'ensemble vide (pas de solution)
  - Le sous ensemble donne une solution optimale entière
  - Le sous ensemble donne une solution moins bonne que la meilleur solution (entière) déjà trouvée
- Si tous les sous ensembles sont figés, on garde la meilleure solution entière → FIN
- Sinon retourner à l'étape 2 pour tous les sous ensembles non-figés

<u>Exemple :</u>

$\max\ z = -x_1 + 2x_2$

$-4x_1 + 6x_2 \leq 9$
$x_1 + x_2 \leq 4$

$x_1, x_2 \in \mathbb{N}$

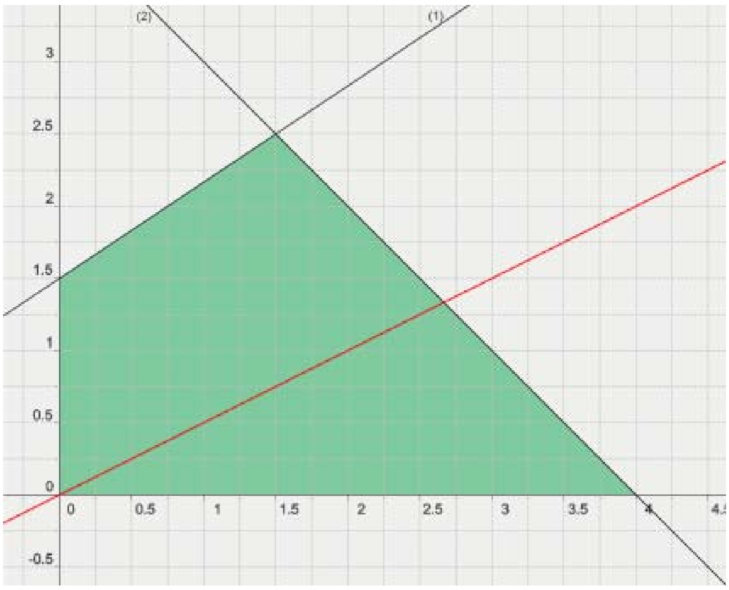
<u>Etape 1 : Résolution du programme linéaire</u>

(Résolution graphique)

$$x_1 = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2}$$

$$z = \frac{7}{2}$$



Etape 2 : Séparation

On choisit x_2 pour séparer

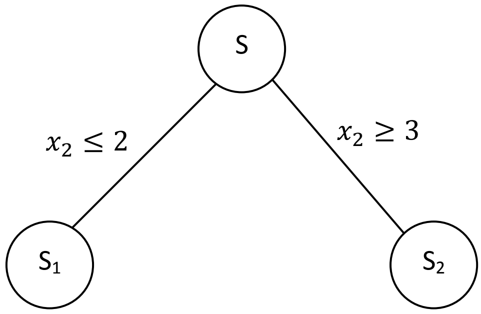
$$x_2 = 2 + \frac{1}{2}$$

$\widetilde{x_2} = 2$ et $f_2 = \frac{1}{2}$

On partage l'ensemble des solutions admissibles en deux sous ensembles.

S_1 : ensemble des solutions pour $x_2 \leq 2$
S_2 : ensemble des solutions pour $x_2 \geq 3$

On obtient deux nouveaux programmes linéaires :



PL1 :
$\max\ z = -x_1 + 2x_2$

$-4x_1 + 6x_2 \leq 9$
$x_1 + x_2 \leq 4$
$x_2 \leq 2$

$x_1, x_2 \in \mathbb{N}$

PL2 :
$\max\ z = -x_1 + 2x_2$

$-4x_1 + 6x_2 \leq 9$
$x_1 + x_2 \leq 4$
$x_2 \geq 3$

$x_1, x_2 \in \mathbb{N}$

Etape 3 : Evaluation

On résout PL1 :

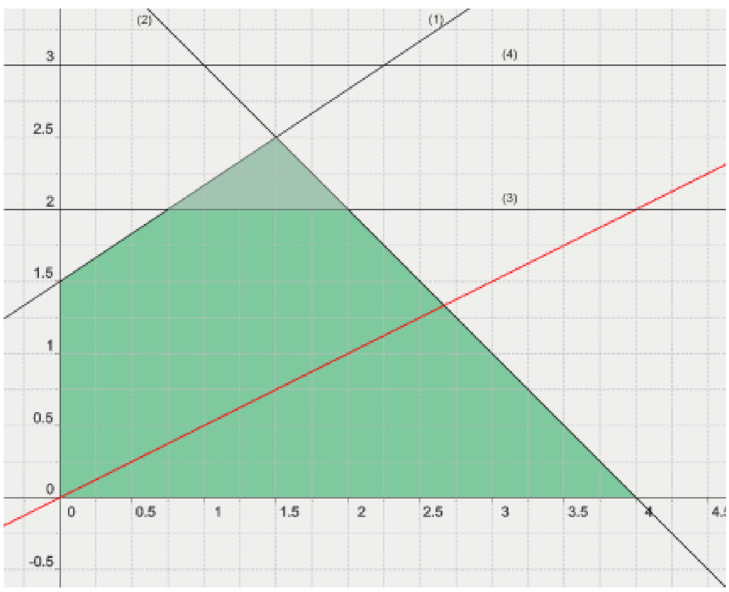
$$x_1 = \frac{3}{4}$$

$$x_2 = 2$$

$$z = \frac{13}{4}$$

On résout PL2 :

Il n'y a pas de solution dans ce cas
➔ S_2 est figée



Etape 4 : Test

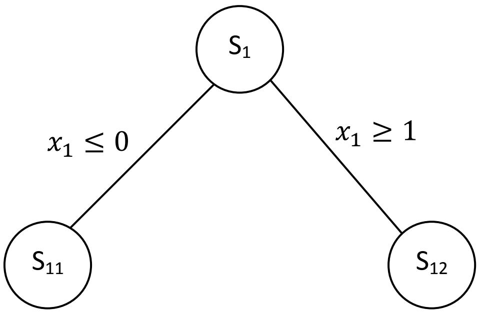
On retourne à l'étape 2 car toutes les solutions ne sont pas figées

Etape 2 : Séparation

On utilise x_1 pour séparer

$x_1 = 0 + \frac{3}{4}$

S_{11} : ensemble des solutions pour $x_1 \leq 0$
S_{12} : ensemble des solutions pour $x_2 \geq 1$



PL11 :
$\max\ z = -x_1 + 2x_2$

$-4x_1 + 6x_2 \leq 9$
$x_1 + x_2 \leq 4$
$x_2 \leq 2$
$x_1 \leq 0$

$x_1, x_2 \in \mathbb{N}$

PL12 :
$\max\ z = -x_1 + 2x_2$

$-4x_1 + 6x_2 \leq 9$
$x_1 + x_2 \leq 4$
$x_2 \leq 2$
$x_1 \geq 1$

$x_1, x_2 \in \mathbb{N}$

Etape 3 : Evaluation

On résout PL11 :

$x_1 = 0$

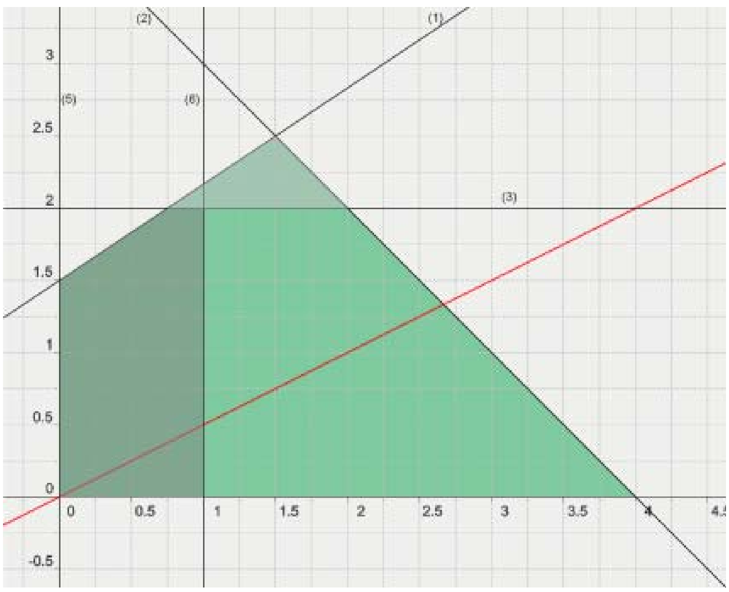
$x_2 = \frac{2}{3}$

$z = 3$

On résout PL12 :

$x_1 = 1$
$x_2 = 2$
$z = 3$

➔S_{12} est figée



Normalement, il faudrait faire encore une itération avec PL111 et PL112 car PL11 donne une solution non figée, mais on passe directement aux résultats :

PL111 :

$x_1 = 0$
$x_2 = 1$
$z = 2$
➔ S_{111} est figée

PL112 :
Il n'y a pas de solution dans ce cas ➔ S_{112} est figée

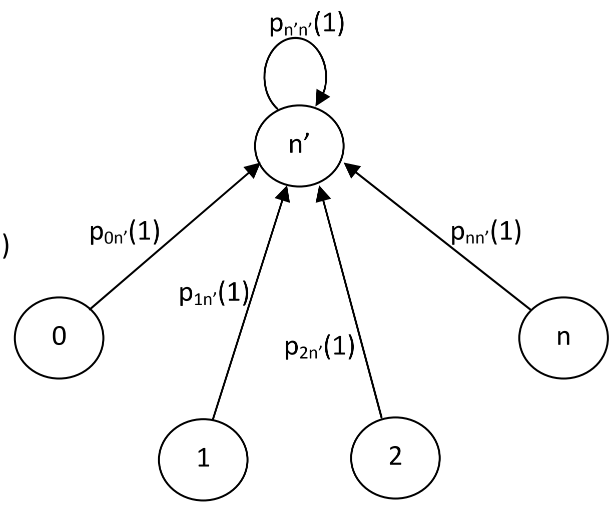
<u>Etape 4 : Test</u>

Toutes les solutions sont figées ➔ l'algorithme se termine

$x_1 = 1$
$x_2 = 2$
$z = 3$

Chapitre 2 : Les chaines de Markov

1) Représentation d'une chaine de Markov



<u>Nœuds</u> : états de la chaine de Markov
<u>Arc</u> : transition entre les états
<u>$p_{nn'}$</u> : probabilité de transition de n à n'

<u>Probabilité d'être dans l'état n' à l'instant i+1</u> : $p_{n'}(i+1)$

Probabilité d'être dans l'état n à l'instant i : $p_n(i)$

$$p_0(i+1) = \sum_n (p_n(i) \cdot p_{n0}(1))$$

$$p_1(i+1) = \sum_n (p_n(i) \cdot p_{n1}(1))$$

…

$$p_{n'}(i+1) = \sum_n (p_n(i) \cdot p_{nn'}(1))$$

<u>Vecteur de probabilité</u> :
$p(i) = |p_0(i), p_1(i), p_2(i), \dots, p_{n'}(i)|$

$$0 \le p_n(i) \le 1 \quad \sum_n p_n(i) = 1$$

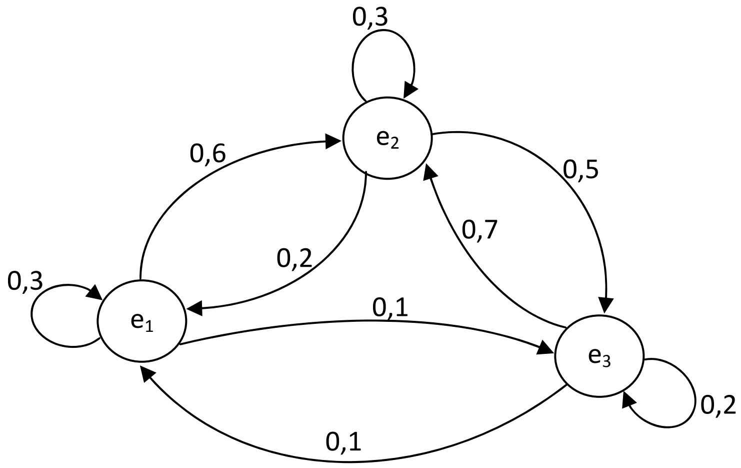
$$p(i+1) = p(i) \cdot T$$

T : matrice de taille $n' \times n'$ formée des $p_{nn'}$

$$T = \begin{vmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots & p_{0n'} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n'} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n'0} & p_{n'1} & p_{n'2} & \cdots & p_{n'n'} \end{vmatrix}$$

$$p(i) = p(0) * T^i$$

Exemple :



	e_1	e_2	e_3
e_1	0,3	0,6	0,1
e_2	0,2	0,3	0,5
e_3	0,1	0,7	0,2

<u>Vecteur d'état $p(i)$:</u>

$p(i) = |p_{e1}, p_{e2}, p_{e3}|$

<u>Vecteur d'état initial :</u>

$p(0) = \left|\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right|$

<u>On peut calculer $p(1), p(2), \ldots, p(i)$:</u>

$p(1) = p(0) \times T$

$p(2) = p(0) \times T^2$

$p(3) = p(0) \times T^3$

<u>Calcul du vecteur d'état limite :</u>

$\lim_{i\to\infty} p(i) = p$

$p(i+1) = p(i) \cdot T$

Avec $i \to \infty$: $p = p \cdot T$

On peut calculer le vecteur d'état limite en résolvant le système d'équation

On peut aussi calculer le vecteur d'état limite en faisant :

$$\lim_{i\to\infty} T^i = \begin{vmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \cdots & p_{n'} \\ p_0 & p_1 & p_2 & \cdots & p_{n'} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_0 & p_1 & p_2 & \cdots & p_{n'} \end{vmatrix}$$

$p_0, p_1, p_2, \ldots, p_{n'}$ sont les composantes du vecteur d'état limite

Dans le cas de l'exemple :

$$T = \begin{vmatrix} 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \end{vmatrix}$$

$p = |p_1, p_2, p_3|$

$$|p_1, p_2, p_3| = |p_1, p_2, p_3| \cdot \begin{vmatrix} 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \end{vmatrix}$$

$p = |0.19, 0.49, 0.32|$

2) Classification des états d'une chaine de Markov

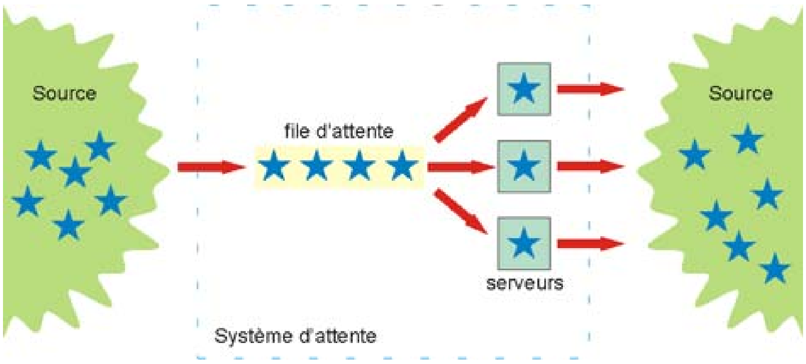
<u>Chaine de Markov irréductible :</u>
Une chaine de Markov est dite irréductible si tous les états communiquent entre eux

<u>Etats absorbants :</u>
Un état est absorbant si $p_{ii} = 1$

<u>Etats périodiques :</u>
Un état est périodique s'il ne peut réapparaitre qu'à des intervalles réguliers équivalents

Chapitre 3 : Les files d'attente

1) Généralités



Les paramètres :

1) Le nombre de serveurs : S
2) Le nombre de positions d'attente : K+S (avec K nombre de position dans la file d'attente)
3) Le type de service appliqué au modèle d'attente : PAPS (FCFS)
4) Le nombre d'unités dans la source : M
5) La nature des arrivées : elles suivent une loi de Poisson

   $P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} \cdot e^{-\lambda t}$

   λ : Nombre moyen d'arrivées dans le système d'attente par unité de temps

   $P_n(t)$: Probabilité d'observer n arrivées dans le système d'attente sur un intervalle de temps t

   Exemple : λ=10 arrivées par heure

   $$P_3(1h) = \frac{10^3}{3!} = 7.5 * 10^{-3}$$

   $$P_{10}(1h) = 0.125$$

6) Nature des services : ils suivent une loi exponentielle

   Θ : Variable aléatoire qui représente l'intervalle de temps séparant deux services

   $\mathrm{P}(\Theta < \theta) = 1 - \mathrm{e}^{-\mu\theta}$

   µ: nombre moyen de services par unité de temps

   Exemple : µ=2 services par heure

   $\mathrm{P}(\Theta < 0.1h) = 1 - \mathrm{e}^{-2*0.1} = 0.18$

   $\mathrm{P}(\Theta < 2h) = 1 - \mathrm{e}^{-2*2} = 0.99$

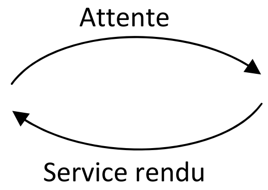
2) File d’attente à un serveur

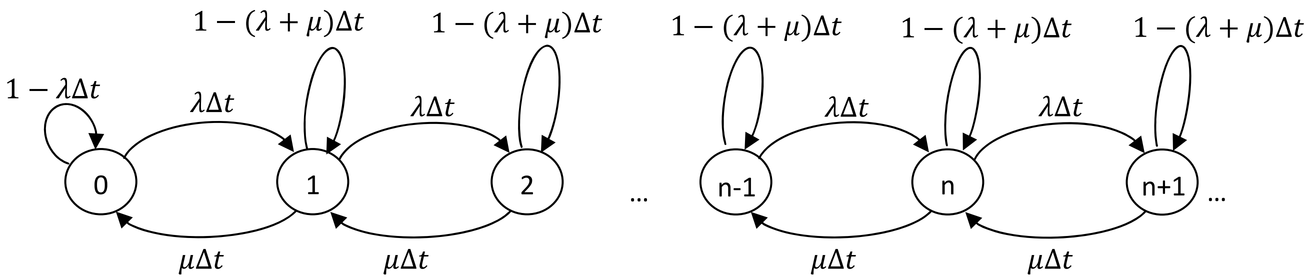
<u>Les paramètres :</u>
- M=∞
- K=∞
- S=1
- PAPS
- Les arrivées suivent une loi de Poisson de $t * \lambda$
- Les services suivent une loi exponentielle de $t * \mu$

<u>Hypothèse :</u>

Le nombre moyen d’arrivées par unité de temps (λ) est inferieur au nombre moyen de services par unité de temps.

<u>Graphe de la file d’attente :</u>





a) Probabilité P_n du nombre d’unités dans le système d’attente

$$P_0(t+\Delta t) = P_0(t) \times (1-\lambda\Delta t) + P_1(t) \times \mu\Delta t$$

$$P_0(t+\Delta t) - P_0(t) = -P_0(t) \times \lambda\Delta t + P_1(t) \times \mu\Delta t$$

$$\frac{P_0(t+\Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} = -P_0(t) \times \lambda + P_1(t) \times \mu$$

$$P_n(t+\Delta t) = P_{n-1}(t) \times \lambda\Delta t + P_n(t) \times (1-(\lambda+\mu)\Delta t) + P_{n+1}(t) \times \mu\Delta t$$

$$P_n(t+\Delta t) - P_n(t) = P_{n-1}(t) \times \lambda\Delta t - P_n(t) \times (\lambda+\mu)\Delta t + P_{n+1}(t) \times \mu\Delta t$$

$$\frac{P_n(t+\Delta t) - P_n(t)}{\Delta t} = P_{n-1}(t) \times \lambda - P_n(t) \times (\lambda+\mu) + P_{n+1}(t) \times \mu$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{P_n(t+\Delta t) - P_n(t)}{\Delta t} \right) = P'_n(t)$$
$$P'_0(t) = -P_0(t) \times \lambda + P_1(t) \times \mu$$

$$P'_n = P_{n-1}(t) \times \lambda - P_n(t) \times (\lambda + \mu) + P_{n+1}(t) \times \mu$$

<u>En régime permanent :</u>

$$P_n(t) = P_n$$
$$P'_0 = 0$$

$$-P_0 \times \lambda + P_1 \times \mu = 0$$
$$P_{n-1} \times \lambda - P_n \times (\lambda + \mu) + P_{n+1} \times \mu = 0$$

$$P_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \cdot P_0$$
$$P_{n-1} \cdot \lambda - P_n \cdot (\lambda + \mu) + P_{n+1} \cdot \mu = 0$$

<u>Dans le cas où $n = 1$</u>

$$P_0 \cdot \lambda - P_1 \cdot (\lambda + \mu) + P_2 \cdot \mu = 0$$

$$P_2 = -P_0 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) + P_1 \cdot \left(\frac{\lambda + \mu}{\mu}\right) = P_0 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2$$

<u>Dans le cas où $n = 2$</u>

$$P_3 = P_0 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3$$

<u>Règle générale :</u>

$$P_n = P_0 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

<u>Calcul de P_0</u>

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_0 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = 1$$

$$P_0 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = 1$$

Rappel :

$$\sum_{n=0}^{N} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \frac{1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N+1}}{1-\frac{\lambda}{\mu}}$$

Lorsque $\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) < 1$ et que $N \to \infty$ alors

$$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N+1} \to 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu}}$$

$$P_0 \cdot \frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu}} = 1$$

$$P_0 = 1-\frac{\lambda}{\mu}$$

$$\psi = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$P_0 = 1-\psi$$

$$P_n = \psi^n(1-\psi)$$

b) Probabilité d’avoir dans le système un nombre d’unités N inferieur à n

$$P(N \leq n) = \sum_{i=0}^{n} P_i$$

$$P(N \leq n) = \sum_{i=0}^{n} \left(P_0 \cdot \psi^i\right)$$

$$P(N \leq n) = P_0 \cdot \sum_{i=0}^{n} \psi^i$$

$$P(N \leq n) = (1 - \psi) \cdot \frac{1 - \psi^{n+1}}{1 - \psi}$$

$$P(N \leq n) = 1 - \psi^{n+1}$$

c) Nombre moyen d'unités dans le système d'attente $\bar{n}$

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P_n$$

$$\bar{n} = \frac{\psi}{1 - \psi}$$

d) Nombre moyen d'unités dans la file d'attente $\bar{v}$

$$\bar{v} = \frac{\psi^2}{1 - \psi}$$

3) File d'attente à plusieurs serveurs

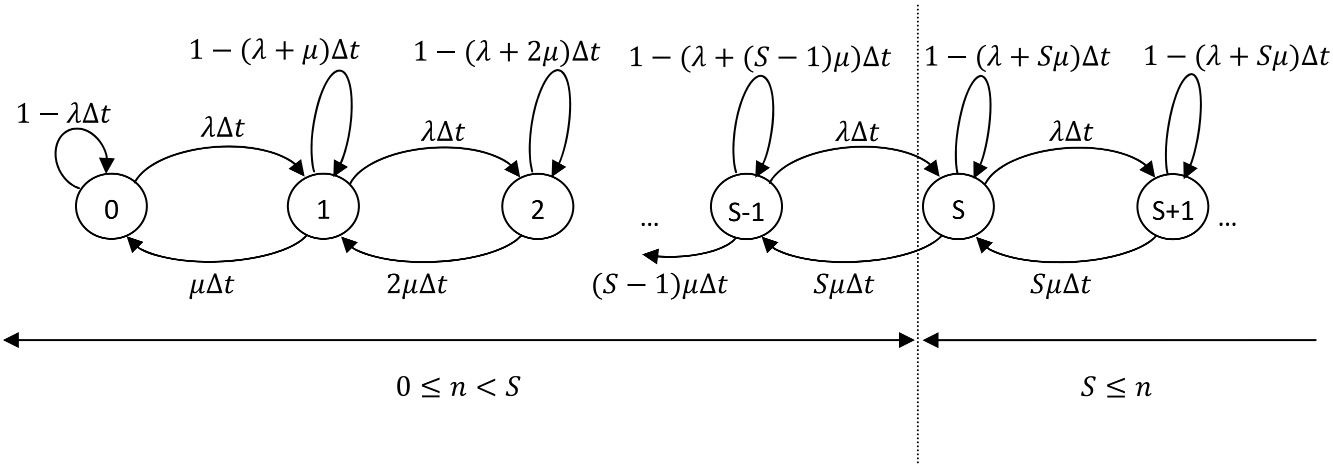
Les paramètres :
- M *éléments dans la source*=∞
- K *positions d'attente*=∞
- S>1
- PAPS
- Les arrivées suivent une loi de Poisson de (λ)
- Les services suivent une loi exponentielle de (μ)

Hypothèse :

$\lambda < \mu S$ ou $\frac{\lambda}{\mu S} < 1$

Le nombre moyen d'arrivées par unité de temps est inférieur au nombre moyen de services par unité de temps.

Graphe du système d'attente :



a) Probabilité P_n du nombre d'unités dans le système d'attente

$$P_0(t+\Delta t) = P_0(t) \times (1-\lambda\Delta t) + P_1(t) \times \mu\Delta t$$

Pour $1 \le n < S$:

$$P_n(t+\Delta t) = P_{n-1}(t) \times \lambda\Delta t + P_n(t) \times (1-(\lambda+n\mu)\Delta t) + P_{n+1}(t) \times (n+1)\mu\Delta t$$

Pour $n \ge S$:

$$P_n(t+\Delta t) = P_{n-1}(t) \times \lambda\Delta t + P_n(t) \times (1-(\lambda+S\mu)\Delta t) + P_{n+1}(t) \times S\mu\Delta t$$

En régime permanent :

$$P_n(t) = P_n$$
$$P'_n(t) = 0$$
$$P'_0 = 0$$

$$-\lambda P_0 + \mu P_1 = 0$$

$$P_{n-1} \times \lambda - P_n \times (\lambda+n\mu) + P_{n+1} \times (n+1)\mu = 0 \qquad \text{(pour } 1 \le n < S\text{)}$$

$$P_{n-1} \times \lambda - P_n \times (\lambda+S\mu) + P_{n+1} \times S\mu = 0 \qquad \text{(pour } S \le n\text{)}$$

1er cas : $1 \le n < S$

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu} \cdot P_0$$

Si n=1 :

$$P_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \cdot P_0$$

Si n=2 :

$$P_3 = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 \cdot P_0$$

Cas général :

$$P_n = \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot P_0$$

<u>2^eme cas : $S \leq n$</u>

$$P_n = \frac{1}{S^{n-S} \cdot S!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot P_0$$

<u>Calcul de P_0 :</u>

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P_n = 1$$

$$P_0 + P_0 \cdot \psi + \frac{1}{2!} \cdot P_0 \cdot \psi^2 + \cdots + \frac{1}{(S-1)!} \cdot P_0 \cdot \psi^{S-1} + \frac{1}{S!} \cdot P_0 \cdot \psi^S + \frac{1}{S! \cdot S} \cdot P_0 \cdot \psi^{S+1} + \cdots = 0$$

$$P_0 \cdot \left[\sum_{n=0}^{S-1} \frac{\psi^n}{n!} + \frac{\psi^S}{S!} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{\psi}{S}\right)^k\right] = 1$$

$$P_0 \cdot \left[\sum_{n=0}^{S-1} \frac{\psi^n}{n!} + \frac{\psi^S}{S!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\psi}{S}}\right] = 1$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{S-1} \left(\frac{\psi^n}{n!}\right) + \frac{\psi^S}{S!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\psi}{S}}}$$

b) Probabilité d'attendre

$$P(N \geq S) = \sum_{n=S}^{+\infty} \left[P_0 \cdot \frac{1}{S^{n-S} \cdot S!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right]$$

$$P(N \geq S) = P_0 \cdot \frac{S^S}{S!} \cdot \sum_{n=S}^{+\infty} \left(\frac{\psi}{S}\right)^n$$

$$P(N \geq S) = P_0 \cdot \frac{S^s}{S!} \cdot \sum_{n=S}^{+\infty} \left(\frac{\psi}{S}\right)^n$$

$$P(N \geq S) = P_0 \cdot \frac{S^s}{S!} \cdot \left[\frac{1}{1-\frac{\psi}{S}} + \frac{1-\left(\frac{\psi}{S}\right)^s}{1-\psi}\right]$$

$$P(N \geq S) = P_0 \cdot \frac{\psi^s}{S! \cdot \left(1-\frac{\psi}{S}\right)} = P_a$$

c) Nombre moyen d'unités dans la file d'attente $\bar{v}$

$$\bar{v} = \frac{\psi P_a}{S - \psi}$$

$$\bar{v} = P_0 \cdot \frac{\psi^{s+1}}{(S-1)! \cdot (S-\psi)^2}$$

d) Nombre moyen d'unités dans le système d'attente $\bar{n}$

$$\bar{n} = \psi\left(1 + \frac{P_a}{S-\psi}\right)$$

e) Temps moyen d'attente dans la file $\overline{tf}$

$$\overline{tf} = \frac{\bar{v}}{\lambda} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{P_a}{S-\psi}$$

f) Temps moyen d'attente dans le système $\overline{ts}$

$$\overline{ts} = \frac{\bar{n}}{\lambda} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{P_a}{S-\psi} + \frac{1}{\mu}$$

Chapitre 4 : Problèmes d'ordonnancement

1) Problèmes d'ordonnancement avec contrainte de ressources

Contrainte de précédence :
La tâche C ne peut commencer que si les tâches A et B sont terminées.

- ⇨ Méthodes MPM ou PERT

Contrainte de ressources :
La tâche C ne peut commencer que si les tâches A et B sont terminées, et qu'il y a suffisamment de ressources disponibles pour qu'elle s'exécute.

- ⇨ Méthode Sérielle (méthode de liste)

Le but est de déterminer la durée de l'ordonnancement.

Notations :

- I : ensemble des tâches classées selon un ordre de priorité
- U : ensemble des tâches traitées
- $\overline{U}$: complement de U
- t : variable qui représente le temps
- t_i : date de rélisation au plus tot de la tâche i

Algorithme :

$U = \{\emptyset\}$
$t = 0$
Tant que $U \neq I$ **faire**
    $S \leftarrow$(sous ensemble des tâches de $\overline{U}$ disponibles à l'instant t
    Si $S \neq \{\emptyset\}$ **alors**
        Choisir dans S la tâche i de plus grande priorité
        $U = U + \{i\}$
        $t_i = t$
    Sinon
        Déterminer le plus petit instant t où une tâche de $\overline{U}$ devient disponible
    Fin si
Fin tant que

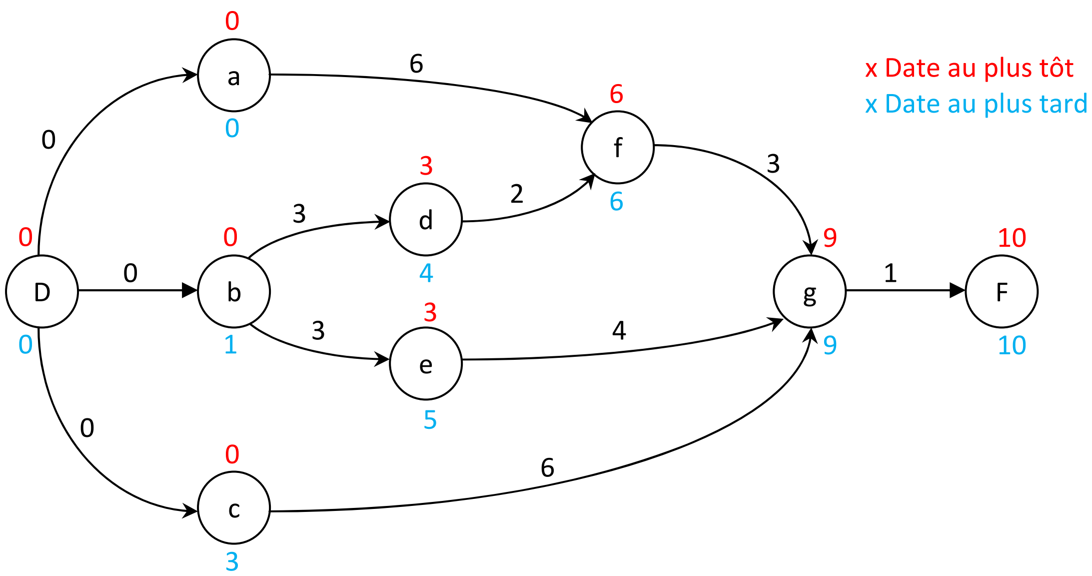
Remarques :

- Une tâche est disponible si les tâches qui la précède sont achevées et s'il y a suffisamment de ressources pour l'exécuter
- On ordonne les tâches dans le sens des dates au plus tard croissantes.

Exemple :

Tâche	Durée	Ressource	Précédence
a	6	3	-
b	3	2	-
c	6	1	-
d	2	1	b
e	4	3	b
f	3	3	d, a
g	1	2	f, e, c

Les ressources disponibles à un instant donné sont limitées à 5.



$I = \{a, b, c, d, e, f, g\}$
$U = \{\emptyset\}$

$\underline{t = 0}$ 5 Unités de Ressource (UR) disponibles
$S = \{a, b, c\}$ (Tâches disponibles : a,b,c)
On choisit a (plus prioritaire)
$t_a = 0$; $U = \{a\}$
a prend 3 UR ➔ il reste 2 UR

$\underline{t = 0}$ 2 UR disponibles
$S = \{b, c\}$
On choisit b
$t_b = 0$; $U = \{a, b\}$
b prend 2 UR ➔ il reste 0 UR

$\underline{t = 3}$ b se termine et libère 2 UR
2 UR disponibles
$S = \{c, d\}$
On choisit c
$t_c = 3$; $U = \{a, b, c\}$
c prend 1 UR ➔ il reste 1 UR

$\underline{t=3}$ 1 UR disponible
$S = \{d\}$
On choisit d
$t_d = 3\,;U = \{a, b, c, d\}$
d prend 1 UR ➔ il reste 0 UR

$\underline{t=5}$ d se termine et libère 1 UR
1 UR disponible
$S = \{\emptyset\}$ (Aucune tâche n'est disponible)

$\underline{t=6}$ a se termine et libère 3 UR
4 UR disponibles
$S = \{e, f\}$
On choisit e
$t_e = 6\,;U = \{a, b, c, d, e\}$
⍰ prend 3 UR ➔ il reste 1 UR

$\underline{t=9}$ c se termine et libère 1 UR
2 UR disponibles
$S = \{\emptyset\}$ (Aucune tâche n'est disponible)

$\underline{t=10}$ e se termine et libère 3 UR
5 UR disponibles
$S = \{f\}$
On choisit f
$t_f = 10\,;U = \{a, b, c, d, e, f\}$
f prend 3 UR ➔ il reste 2 UR

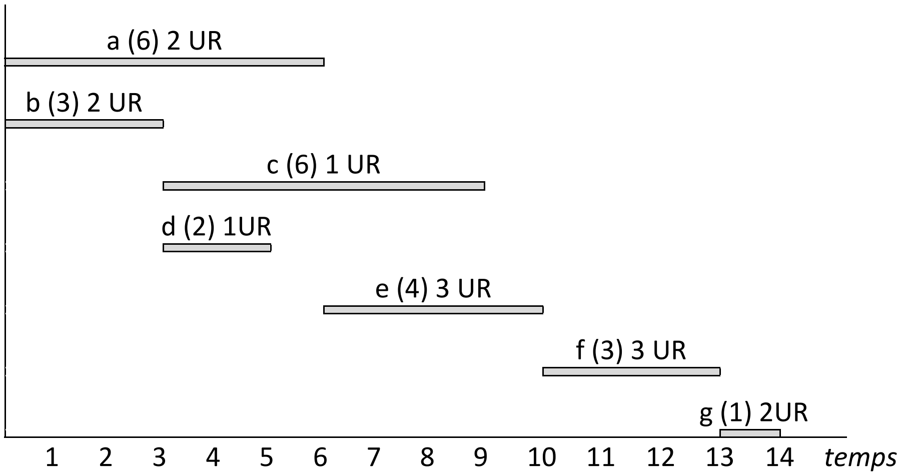
$\underline{t=13}$ f se termine et libère 3 UR
5 UR disponibles
$S = \{g\}$
$t_g = 13\,;U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$

Ressources dispo

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
5	a	a	a	a	a	a	e	e	e	e	f	f	f	g	
4	a	a	a	a	a	a	e	e	e	e	f	f	f	g	
3	a	a	a	a	a	a	e	e	e	e	f	f	f		
2	b	b	b	c	c	c	c	c	c						
1	b	b	b	d	d										

temps

tâches



2) Problèmes d'ordonnancement sur M machines

a) Ordonnancement de N tâches sur M machines identiques

- N tâches morcelables de durée $P_1, P_2, \dots, P_N$
- M machines
- Une tâche i s'exécute dans un intervalle de temps $[a_i, d_i]$
- La tâche i est disponible à $t = a_i$
- La tâche i doit d'achever à $t = d_i$

<u>Exemple :</u>

	a	b	c	d
a_i	0	0	0	2
p_i	2	2	4	2
d_i	5	3	4	5

Avec $M = 2$

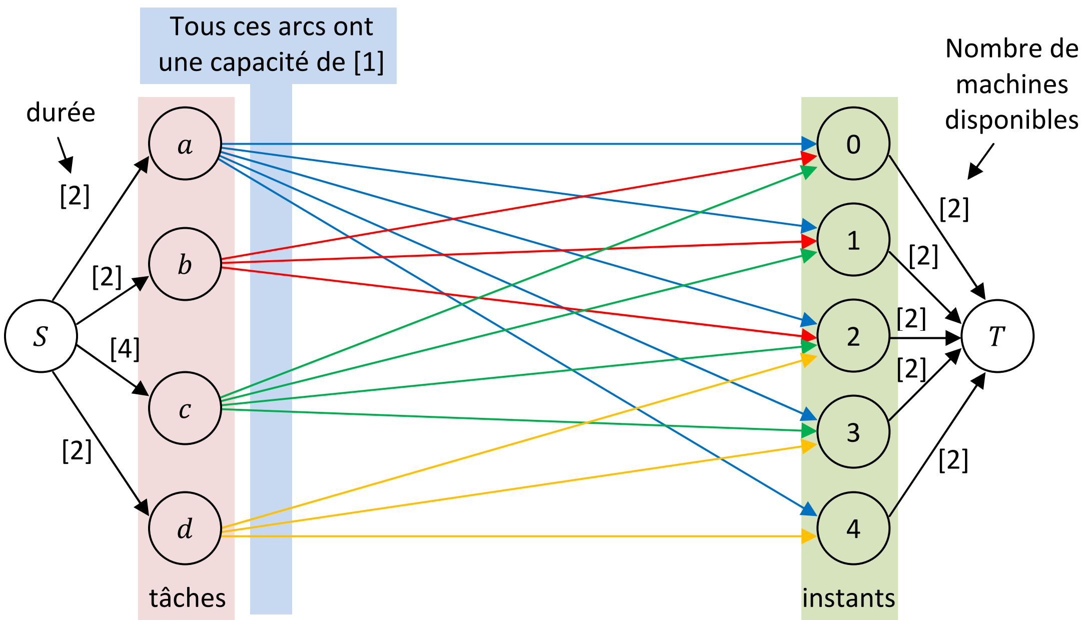
M_1	C	C	C	C	A
M_2	B	B	A	D	D
	0	1	2	3	4	5

<u>Méthode :</u>

1. Modélisation du problème par un réseau de transport
2. Application de l'algorithme de Ford-Fulkerson sur le réseau de transport

Etape 1 : La modélisation

On relie une tâche i à un instant t si la tâche i peut s'exécuter dans l'intervalle de temps $[a_i, d_i]$



Etape 2 : Algorithme de Ford-Fulkerson

cf. cours de moca B1

M_1	B	B	A	C	A
M_2	C	C	C	D	D
	0	1	2	3	4 5

b) Ordonnancement de N tâches non interruptibles de durée identique sur M machines identiques

- N tâches non interruptibles de durée p (p=1)
- M machines identiques
- Les contraintes de précédence sur les tâches forment un graphe convergent (Chaque nœud possède au plus un successeur)

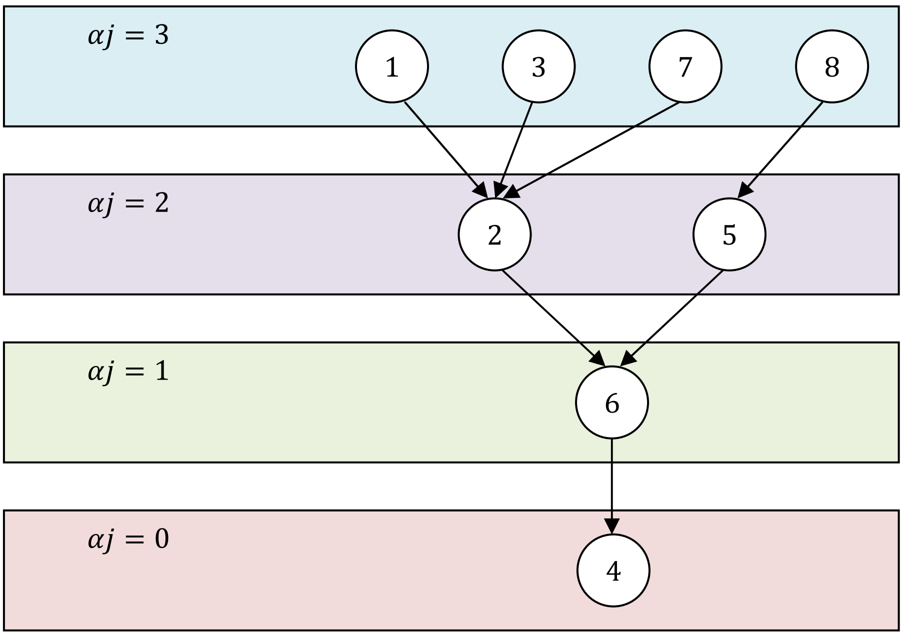
Le but est de minimiser la durée de l'ordonnancement.

<u>Méthode :</u>

1. On attribue un ordre de priorité à chaque tâche
   - la valeur $\alpha j = 0$ à toute tâche qui n'a pas de successeur direct
   - la valeur $\alpha j = \alpha k + 1$ où k est le successeur direct de j
2. On place les tâches non disponibles sur les machines dans l'ordre de priorité décroissant (une tâche est disponible si toutes les valeurs qui la précèdent sont achevées)

<u>Exemple :</u>

- 8 tâches de durée égale à 1
- 3 machines



$L = \{1, 3, 7, 8, 2, 5, 6, 4\}$

$M1$	1	8	5	6	4
$M2$	3	2			
$M3$	7				
0	1	2	3	4	5

La durée totale de l’ordonnancement est de 5.