

# Moca B2

v1.00

Kevin DEHLINGER  
<http://dev.pulsed.net/wp>



2007

## Table des matières

---

<b>Chapitre 1 : Programmation linéaire.....</b>	<b>4</b>
1) Exemple .....	4
2) Méthode graphique .....	5
3) Méthode algébrique.....	6
4) Méthode algébrique du simplexe .....	7
5) La méthode des tableaux du simplexe.....	10
6) utilisation de variables artificielles.....	12
7) Problème dual d'un programme linéaire .....	14
a) Introduction.....	14
b) Résolution du problème dual par la méthode du simplexe.....	15
c) Passage du tableau final du problème dual au tableau final du problème primal .....	17
8) Programmation linéaire paramétrée .....	18
a) Paramétrage des coefficients de la fonction économique.....	18
b) paramétrage des seconds membres des contraintes .....	22
9) Programmation linéaire en nombres entiers.....	24
La méthode de séparation et évaluation .....	24
<b>Chapitre 2 : Les chaines de Markov.....</b>	<b>29</b>
1) Représentation d'une chaine de Markov.....	29
2) Classification des états d'une chaine de Markov .....	31
<b>Chapitre 3 : Les files d'attente .....</b>	<b>32</b>
1) Généralités .....	32
2) File d'attente à un serveur .....	33
a) Probabilité $P_n$ du nombre d'unités dans le système d'attente .....	33
b) Probabilité d'avoir dans le système un nombre d'unités $N$ inférieur à $n$ .....	35
c) Nombre moyen d'unités dans le système d'attente $n$ .....	36
d) Nombre moyen d'unités dans la file d'attente $v$ .....	36
3) File d'attente à plusieurs serveurs .....	36
a) Probabilité $P_n$ du nombre d'unités dans le système d'attente .....	37
b) Probabilité d'attendre .....	38
c) Nombre moyen d'unités dans la file d'attente $v$ .....	39
d) Nombre moyen d'unités dans le système d'attente $n$ .....	39

---

e) Temps moyen d'attente dans la file $tf$ .....	39
f) Temps moyen d'attente dans le système $ts$ .....	39
<b>Chapitre 4 : Problèmes d'ordonnancement</b> .....	<b>40</b>
1) Problèmes d'ordonnancement avec contrainte de ressources .....	40
2) Problèmes d'ordonnancement sur $M$ machines.....	43
a) Ordonnancement de $N$ tâches sur $M$ machines identiques .....	43
b) Ordonnancement de $N$ tâches non interruptibles de durée identique sur $M$ machines identiques.....	44

## Chapitre 1 : Programmation linéaire

### 1) Exemple

Un transporteur dispose d'un camion dans lequel il peut charger au maximum, soit 2 tonnes, soit  $4\text{m}^3$  de matériel.

Il peut transporter les marchandises M1 et M2 :

- M1 :  $1000\text{kg}/\text{m}^3$
- M2 :  $250\text{kg}/\text{m}^3$

Il facture le transport de M1 à 10€ la tonne et le transport de M2 à 24€ la tonne.

Il ne peut transporter qu'un volume de M2 inférieur ou égal à  $(5\text{m}^3 - 2 \cdot \text{VolM1})$

Questions:

Quel chargement optimal le transporteur doit-il emporter ?

Quel poids (ou volume) de M1 et M2 le transporteur doit-il emporter pour que son bénéfice soit maximal ?

Il faut formaliser le problème sous la forme d'un programme linéaire.

Soient :

- P1 le poids de M1
- P2 le poids de M2
- V1 le volume de M1
- V2 le volume de M2

Les contraintes :

$$P1 + P2 \leq 2\text{tonnes} \quad (1)$$

$$V1 + V2 \leq 4\text{m}^3 \quad (2)$$

$$V2 \leq 5\text{m}^3 - 2 \cdot V1 \quad (3)$$

Fonction économique z :

$$\text{Max } z = 10 P1 + 24 P2$$

Conversion des contraintes dans la même unité :

$$P1 + P2 \leq 2 \quad (1)$$

$$\frac{P1}{1} + \frac{P2}{0.25} \leq 4 \quad (2)$$

$$\frac{P2}{0.25} \leq 5 - \frac{2P1}{1} \quad (3)$$

$$\text{Max } z = 10 P1 + 24 P2$$

$$\begin{aligned} P1 + P2 &\leq 2 & (1) \\ P1 + 4P2 &\leq 4 & (2) \\ 2P1 + 4P2 &\leq 5 & (3) \end{aligned}$$

$$\text{Max } z = 10 P1 + 24 P2$$

Programme linéaire :

- Deux variables
- trois contraintes
- Une fonction économique à maximiser

Forme générale :

- Une fonction économique à maximiser  

$$\text{Max } z = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \dots + C_n X_n$$
- m contraintes
  - $a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + \dots + a_{1n} X_n$  (1)
  - $a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + \dots + a_{2n} X_n$  (2)
  - ...
  - $a_{m1} X_1 + a_{m2} X_2 + \dots + a_{mn} X_n$  (m)

## 2) Méthode graphique

$$(1) P2 = -P1 + 2$$

$$(2) P2 = -\frac{1}{4}P1 + 1$$

$$(3) P2 = -\frac{1}{2}P1 + \frac{5}{4}$$

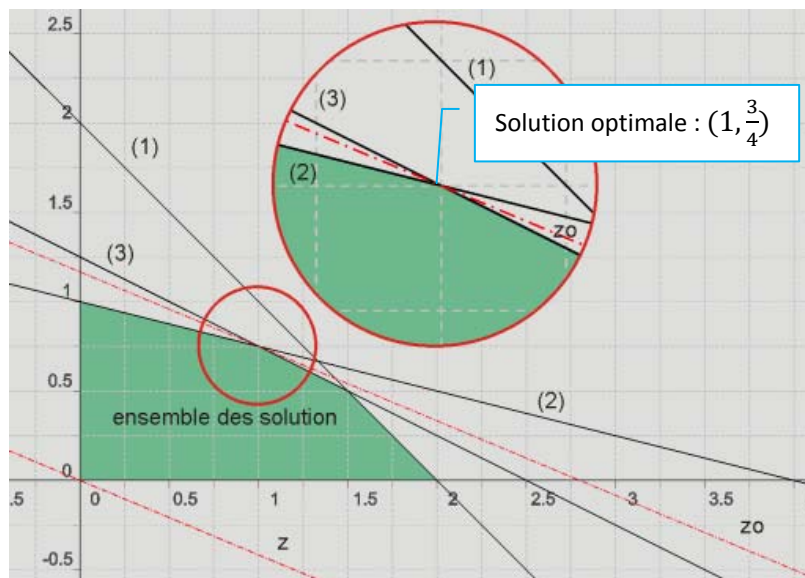
$$z = 10P1 + 24P2$$

$$z = 0 \rightarrow P2 = -\frac{10}{24}P1$$

solution optimale :

$$P1 = 1 \text{ et } P2 = \frac{3}{4} \rightarrow z = 28$$

→ 1 tonne de P1, 750 kg de P2 → bénéfice 28€



### 3) Méthode algébrique

En utilisant le même exemple

$$x_1 + x_2 \leq 2 \quad (1)$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 4 \quad (2)$$

$$2x_1 + 4x_2 \leq 5 \quad (3)$$

$$\text{Max } z = 10x_1 + 24x_2$$

On sait que la solution se trouve en un sommet du polygone (cf. résolution graphique)

Le principe de la résolution algébrique :

- Énumération de l'ensemble des sommets du polygone
- Calcul de la valeur de la fonction économique en ces sommets
- On garde la valeur maximale de la fonction économique

Pour déterminer les sommets il faut introduire des variables d'écart :

$$x_1 \leq 2 \rightarrow x_1 + x_2 = 2 \text{ avec } x_2 \geq 0$$

$$x_1 \geq 2 \rightarrow x_1 - x_2 = 2 \text{ avec } x_2 \geq 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2 \quad (1)$$

$$x_1 + 4x_2 + x_4 = 4 \quad (2)$$

$$2x_1 + 4x_2 + x_5 = 5 \quad (3)$$

$$x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad \rightarrow \text{Variables d'écart}$$

$$x_1 \quad x_2 \quad \rightarrow \text{Variables principales}$$

Si  $x_3 = 0$ , la solution se trouve sur  $x_1 + x_2 = 2$

Si  $x_5 = 0$ , la solution se trouve sur  $2x_1 + 4x_2 = 5$

Donc si  $x_3 = 0$  et  $x_5 = 0$ , la solution se trouve à l'intersection de  $x_1 + x_2 = 2$  et de  $2x_1 + 4x_2 = 5$

Pour obtenir un sommet du polygone il faut annuler 2 des 5 variables de la forme standard.

$n=2 \rightarrow$  nombre de variables principales

$m=3 \rightarrow$  nombre de variables d'écart

La solution obtenue est appelée solution de base.

$$x_3 = 0 \quad x_5 = 0$$

$$\rightarrow x_2 = \frac{1}{2} \quad x_1 = \frac{3}{2} \quad x_4 = \frac{1}{2} \quad z = 27$$

Solution de base admissible car  $\forall i, x_i \geq 0 \rightarrow$  sommet du polygone

$$x_1 = 0 \quad x_5 = 0$$

$$\rightarrow x_2 = \frac{5}{4} \quad x_3 = \frac{3}{4} \quad x_4 = -1 \quad z = 30$$

Solution de base non admissible car  $x_4 < 0 \rightarrow$  cela ne correspond pas à un sommet du polygone

Algorithme :

1) déterminer toutes les solutions de base admissibles, annuler n variables sur les n+m variables avec  $\forall i, x_i \geq 0 \rightarrow$  sommet du polygone

2) Calculer z

3) Garder la valeur max

Calcul du nombre de solutions de base :

$$C_{n+m}^n = \frac{(n+m)!}{n!m!}$$

Si n=2 et m=6 comme dans cet exemple il y a 10 solutions de base

n=6, m=6  $\rightarrow$  924 solutions de base

...

#### 4) Méthode algébrique du simplexe

*En utilisant le même exemple*

$$x_1 + x_2 \leq 2 \quad (1)$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 4 \quad (2)$$

$$2x_1 + 4x_2 \leq 5 \quad (3)$$

$$\text{Max } z = 10x_1 + 24x_2$$

Introduction des variables d'écart :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2 \quad (1)$$

$$x_1 + 4x_2 + x_4 = 4 \quad (2)$$

$$2x_1 + 4x_2 + x_5 = 5 \quad (3)$$

$$10x_1 + 24x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = z$$

Solution évidente :

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 0$$

$\rightarrow$  calcul des autres variables

$$x_3 = 2 \quad x_4 = 4 \quad x_5 = 5 \quad z = 0$$

On veut augmenter z ( $z = 10x_1 + 24x_2$ ) :

- On choisit d'augmenter  $x_1$  ou  $x_2$ , dans ce cas on augmentera  $x_2$  car la dérivée partielle est plus importante ( $24 > 10$ )
- On pose  $x_2 = \theta$  et  $x_1 = 0$   
La nouvelle solution doit être une solution de base admissible c'est-à-dire  $\forall i, x_i \geq 0$

Résolution :

$$\left| \begin{array}{l} x_3 \geq 0 \\ x_4 \geq 0 \\ x_5 \geq 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x_3 = 2 - \theta \\ x_4 = 4 - 4\theta \\ x_5 = 5 - 4\theta \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} 2 - \theta \geq 0 \\ 4 - 4\theta \geq 0 \\ 5 - 4\theta \geq 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \theta \leq 2 \\ \theta \leq 1 \\ \theta \leq \frac{5}{4} \end{array} \right.$$

$$\theta = \min\left(2, 1, \frac{5}{4}\right) = 1$$

La nouvelle solution:

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 1$$

→ calcul des autres variables

$$x_3 = 1 \quad x_4 = 0 \quad x_5 = 1 \quad z = 24$$

On veut augmenter  $z$ , pour cela il faut augmenter les variables  $x_1$  ou  $x_4$  (celles qui sont égales à 0)

On doit exprimer  $z$  en fonction de  $x_1$  et  $x_4$ , pour cela on utilise la deuxième contrainte (la seule qui contient  $x_1$  et  $x_4$ )

$$x_2 = 1 - \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_4$$

$$z = 10x_1 + 24 - 6x_1 - 6x_4$$

$$z - 24 = 4x_1 - 6x_4$$

$$\rightarrow 4x_1 + 0x_2 + 0x_3 - 6x_4 + 0x_5 = z - 24$$

$$\frac{3}{4}x_1 + x_3 - \frac{1}{4}x_4 = 1 \quad (1)$$

$$\frac{1}{4}x_1 + x_2 + \frac{1}{4}x_4 = 1 \quad (2)$$

$$x_1 - x_4 + x_5 = 1 \quad (3)$$

On augmente  $x_1$  car  $4 > -6$

On pose :  $x_1 = \theta \quad x_4 = 0 \quad \forall i, x_i \geq 0$

$$\left| \begin{array}{l} x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \\ x_5 \geq 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} 1 - \frac{1}{4}\theta \geq 0 \\ 1 - \frac{3}{4}\theta \geq 0 \\ 1 - \theta \geq 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \theta \leq 4 \\ \theta \leq \frac{4}{3} \\ \theta \leq 1 \end{array} \right.$$

$$\theta = \min\left(4, \frac{4}{3}, 1\right) = 1$$



La nouvelle solution:

$$x_1 = 1 \quad x_4 = 0$$

→ calcul des autres variables

$$x_2 = \frac{3}{4} \quad x_3 = \frac{1}{4} \quad x_5 = 0 \quad z = 28$$

On exprime  $z$  en fonction de  $x_4$  et  $x_5$  (les variables nulles) ; pour cela on utilise la 3<sup>ème</sup> contrainte.

$$x_1 - x_4 + x_5 = 1$$

$$x_1 = 1 + x_4 - x_5$$

$$z - 24 = 4 + 4x_4 - 4x_5 - 6x_4$$

$$z - 28 = -2x_4 - 4x_5$$

$$\rightarrow 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 - 2x_4 - 4x_5 = z - 28$$

$$x_3 + \frac{1}{2}x_4 - \frac{3}{4}x_5 = \frac{1}{4} \quad (1)$$

$$x_2 + \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{4}x_5 = \frac{3}{4} \quad (2)$$

$$x_1 - x_4 + x_5 = 1 \quad (3)$$

Comme les coefficients de  $x_4$  et  $x_5$  sont négatifs dans l'équation  $z = f(x_4, x_5)$  on ne peut plus augmenter  $z$ .

La solution est donc :

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = \frac{3}{4}$$

$$x_3 = \frac{1}{4}$$

$$z = 28$$

### 5) La méthode des tableaux du simplexe

$$x_1 + x_2 \leq 2 \quad (1)$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 4 \quad (2)$$

$$2x_1 + 4x_2 \leq 5 \quad (3)$$

$$\text{Max } z = 10x_1 + 24x_2$$

Introduction des variables d'écart :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2 \quad (1)$$

$$x_1 + 4x_2 + x_4 = 4 \quad (2)$$

$$2x_1 + 4x_2 + x_5 = 5 \quad (3)$$

$$10x_1 + 24x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = z$$

$C_i$	$i$	Vecteurs hors base		Vecteurs de base			
		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
0	3	1	1	1	0	0	2
0	4	1	4	0	1	0	4
0	5	2	4	0	0	1	5
	$C_j$	10	24	0	0	0	
	Sol	0	0	2	4	5	
	$\Delta_j$	10	24	0	0	0	0

1<sup>ère</sup> règle : Choisir l'indice j du vecteur colonne qui entre dans la base tel que  $\Delta_j$  soit le plus grand positif possible.

$$\Delta_1 = 10$$

$$\Delta_2 = 24$$

→  $\Delta_2 = 24$  est le plus grand → j=2

Le vecteur colonne 2 entre dans la base.

2<sup>ème</sup> règle : Choisir l'indice i du vecteur colonne qui sort de la base tel que i corresponde la valeur minimale (toujours positive) des rapports de la forme  $\frac{x_i}{a_{ij}}$  (j étant le j de la 1<sup>ère</sup> règle)

$$\frac{x_3}{a_{32}} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{x_4}{a_{42}} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\frac{x_5}{a_{52}} = \frac{5}{4} = 1,25$$

Le vecteur colonne 4 sort de la base (i=4).

$C_i$	$i$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
0	3	$\frac{3}{4}$	0	1	$\frac{1}{4}$	0	1 ligne[3]-(ligne[4] :4)
24	2	$\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{4}$	0	1 ligne[4] :4
0	5	1	0	0	-1	1	1 ligne[5]-4*(ligne[4] :4)
$C_j$		10	24	0	0	0	
<b>Sol</b>		<b>0</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	
$\Delta_j$		4	0	0	-6	0	24 z :ligne[ $\Delta_j$ ]-24*(ligne[4] :4)

Règle 1 :

$$\Delta_1 = 4$$

$$\Delta_4 = -6$$

→  $\Delta_1 = 4$  est le plus grand →  $j=1$

Règle 2:

$$\frac{x_3}{a_{31}} = \frac{1}{3/4} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{x_2}{a_{21}} = \frac{1}{1/4} = 4$$

$$\frac{x_5}{a_{51}} = \frac{1}{1} = 1$$

Le vecteur colonne 5 sort de la base ( $i=5$ ).

$C_i$	$i$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
0	3	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$ ligne[3]-(ligne[5] : $\frac{4}{3}$ )
24	2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$ ligne[2]-(ligne[5] :4)
10	1	1	0	0	-1	1	1 ligne[5]
$C_j$		10	24	0	0	0	
<b>Sol</b>		<b>1</b>	<b><math>\frac{3}{4}</math></b>	<b><math>\frac{1}{4}</math></b>	<b>0</b>	<b>0</b>	
$\Delta_j$		0	0	0	-2	-4	28 z :ligne[ $\Delta_j$ ]- 4*ligne[5]

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = \frac{3}{4}$$

$$z = 28$$

## 6) utilisation de variables artificielles

$$x_1 + x_2 \leq 2 \quad (1)$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 4 \quad (2)$$

$$2x_1 + 4x_2 \leq 5 \quad (3)$$

$$x_1 + x_2 \geq \frac{1}{2} \quad (4)$$

$$\text{Max } z = 10x_1 + 24x_2$$

Introduction des variables d'écart :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2 \quad (1)$$

$$x_1 + 4x_2 + x_4 = 4 \quad (2)$$

$$2x_1 + 4x_2 + x_5 = 5 \quad (3)$$

$$x_1 + x_2 - x_6 = \frac{1}{2} \quad (4)$$

$$10x_1 + 24x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 = z$$

$$x_1 = 0 \quad x_3 = 2 \quad x_5 = 5$$

$$x_2 = 0 \quad x_4 = 4 \quad x_6 = -\frac{1}{2}$$

→ Cette solution de base n'est pas admissible

Pour trouver une solution de base admissible on introduit une variable artificielle ( $x_7$ )

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2 \quad (1)$$

$$x_1 + 4x_2 + x_4 = 4 \quad (2)$$

$$2x_1 + 4x_2 + x_5 = 5 \quad (3)$$

$$x_1 + x_2 - x_6 + x_7 = \frac{1}{2} \quad (4)$$

$$10x_1 + 24x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 - Mx_7 = z \quad (\text{avec } M \gg 0)$$

$$x_1 = 0 \quad x_3 = 2 \quad x_5 = 5 \quad x_7 = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = 0 \quad x_4 = 4 \quad x_6 = 0 \quad z = -\frac{1}{2}M$$

$C_i$	$i$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	
0	3	1	1	1	0	0	0	0	2
0	4	1	4	0	1	0	0	0	4
0	5	2	4	0	0	1	0	0	5
-M	7	1	1	0	0	0	-1	1	$1/2$
$C_j$		10	24	0	0	0	0	-M	
<b>Sol</b>		0	0	2	4	5	0	$1/2$	
$\Delta_j$		$10+M$	$24+M$	0	0	0	-M	0	$-1/2M$

1<sup>ère</sup> règle :  
 $24+M > 10+M$   
 → 2 rentre en base

2<sup>ème</sup> règle :  
 $\frac{1/2}{1}$  est le plus petit  $\frac{x_i}{a_{iz}}$  → 7 sort de la base

$C_i$	$i$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	
0	3	0	0	1	0	0	1	-1	$3/2$
0	4	-3	0	0	1	0	4	-4	2
0	5	-2	0	0	0	1	4	-4	3
24	2	1	1	0	0	0	-1	1	$1/2$
$C_j$		10	24	0	0	0	0	-M	
<b>Sol</b>		0	$1/2$	$3/2$	2	3	0	0	
$\Delta_j$		-14	0	0	0	0	-M	$-M-24$	12

$\Delta_7 = -M - 24$  soit une valeur largement négative et donc nous pouvons à présent nous passer d' $x_7$

1<sup>ère</sup> règle :  
 → 6 rentre en base

2<sup>ème</sup> règle :  
 → 4 sort de la base

$C_i$	$i$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
0	3	$3/4$	0	1	$-1/4$	0	0	1
0	6	$-3/4$	0	0	$1/4$	0	1	$1/2$
0	5	1	0	0	-1	1	0	1
24	2	$1/4$	1	0	$1/4$	0	-1	1
$C_j$		10	24	0	0	0	0	
<b>Sol</b>		0	1	1	0	1	$1/2$	
$\Delta_j$		4	0	0	-6	0	0	24

1<sup>ere</sup> règle :  
 → 1 rentre en base

2<sup>eme</sup> règle :  
 → 5 sort de la base

$C_i$	$i$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
0	3	0	0	1	$1/2$	$-3/4$	0	$1/4$
0	6	0	0	0	$-1/2$	$3/4$	1	$5/4$
0	1	1	0	0	-1	1	0	1
24	2	0	1	0	$1/2$	$-1/4$	0	$3/4$
	$C_j$	10	24	0	0	0	0	
	Sol	1	$3/4$	$1/4$	0	1	$5/4$	
	$\Delta_j$	0	0	-2	-4	0	0	28

$z$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = \frac{3}{4}$$

$$z = 28$$

## 7) Problème dual d'un programme linéaire

### a) Introduction

Problème primal :

$$\text{Max } z = C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_nx_n$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq B_1 \quad (1)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq B_2 \quad (2)$$

...

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq B_m \quad (m)$$

$$\forall i \in [1, n]: x_i \geq 0$$

- Maximisation de z
- Contraintes  $\leq$

Problème dual :

$$\text{Min } z' = B_1 u_1 + B_2 u_2 + \dots + B_n u_n$$

$$a_{11} u_1 + a_{21} u_2 + \dots + a_{m1} u_m \geq C_1 \quad (1)$$

$$a_{12} u_1 + a_{22} u_2 + \dots + a_{m2} u_m \geq C_2 \quad (2)$$

...

$$a_{1n} u_1 + a_{2n} u_2 + \dots + a_{mn} u_m \geq C_n \quad (n)$$

$$\forall i \in [1, n]: u_i \geq 0$$

- minimisation de  $z'$
- Contraintes  $\geq$

Exemple :

Problème Primal :

$$\text{Max } z = 14x_1 + 17x_2 + 12x_3$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 40 \quad (1)$$

$$10x_1 + 12x_2 + 7x_3 \leq 420 \quad (2)$$

$$6x_1 + 9x_2 + 5x_3 \leq 280 \quad (3)$$

Problème dual :

$$\text{Min } z' = 40u_1 + 420u_2 + 280u_3$$

$$u_1 + 10u_2 + 6u_3 \geq 14 \quad (1)$$

$$u_1 + 12u_2 + 9u_3 \geq 17 \quad (2)$$

$$u_1 + 7u_2 + 5u_3 \geq 12 \quad (3)$$

## b) Résolution du problème dual par la méthode du simplexe

Introduction de variables d'écart :

$$u_1 + 10u_2 + 6u_3 - u_4 = 14 \quad (1)$$

$$u_1 + 12u_2 + 9u_3 - u_5 = 17 \quad (2)$$

$$u_1 + 7u_2 + 5u_3 - u_6 = 12 \quad (3)$$

$$\text{Max } -z' = -40u_1 - 420u_2 - 280u_3 + 0u_4 + 0u_5 + 0u_6$$

Solution évidente :

$$u_1 = 0 \quad u_4 = -14$$

$$u_2 = 0 \quad u_5 = -17$$

$$u_3 = 0 \quad u_6 = -12$$

$$z = 0$$

Ce n'est pas une solution de base admissible car  $u_4, u_5, u_6 < 0$

Introduction de variables artificielles:

$$u_1 + 10u_2 + 6u_3 - u_4 + u_7 = 14 \quad (1)$$

$$u_1 + 12u_2 + 9u_3 - u_5 + u_8 = 17 \quad (2)$$

$$u_1 + 7u_2 + 5u_3 - u_6 + u_9 = 12 \quad (3)$$

$$-z' = -40u_1 - 420u_2 - 280u_3 + 0u_4 + 0u_5 + 0u_6 - Mu_7 - Mu_8 - Mu_9$$

$C_i$	$i$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	
-M	7	1	10	6	-1	0	0	1	0	0	14
-M	8	1	12	9	0	-1	0	0	1	0	17
-M	9	1	7	5	0	0	-1	0	0	1	12
	$C_j$	-40	-420	-280	0	0	0	-M	-M	-M	
	Sol	0	0	0	0	0	0	14	17	12	
	$\Delta_j$	-40 + 3M	-420 + 29M	-280 + 20M	-M	-M	-M	0	0	0	-43M

Après un certain nombre d'itérations :

$C_i$	$i$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
-40	1	1	0	0	$\frac{3}{7}$	$\frac{8}{7}$	$-\frac{18}{7}$	$\frac{38}{7}$
-420	2	0	1	0	$-\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$
-280	3	0	0	1	$\frac{5}{7}$	$-\frac{3}{7}$	$-\frac{2}{7}$	$\frac{5}{7}$
	$C_j$	-40	-420	-280	0	0	0	
	Sol	$\frac{38}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{5}{7}$	0	0	0	
	$\Delta_j$	0	0	0	$-\frac{160}{7}$	$-\frac{100}{7}$	$-\frac{20}{7}$	$-\frac{4180}{7}$



c) Passage du tableau final du problème dual au tableau final du problème primal

$C_i$	$i$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
-40	1	1	0	0	$\frac{3}{7}$	$\frac{8}{7}$	$-\frac{18}{7}$	$\frac{38}{7}$
-420	2	0	1	0	$-\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$
-280	3	0	0	1	$\frac{5}{7}$	$-\frac{3}{7}$	$-\frac{2}{7}$	$\frac{5}{7}$
	$C_j$	-40	-420	-280	0	0	0	
	Sol	$\frac{38}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{5}{7}$	0	0	0	
	$\Delta_j$	0	0	0	$-\frac{160}{7}$	$-\frac{100}{7}$	$-\frac{20}{7}$	$-\frac{4180}{7}$ $-z'$

Colonnes du dual

	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$u_4$	$u_5$	$u_6$	S	
$u_1$	-1	0	0	$-\frac{3}{7}$	$-\frac{8}{7}$	$+\frac{18}{7}$	$-\frac{38}{7}$	$x_4$
$u_2$	0	-1	0	$+\frac{4}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{3}{7}$	$-\frac{3}{7}$	$x_5$
$u_3$	0	0	-1	$-\frac{5}{7}$	$+\frac{3}{7}$	$+\frac{2}{7}$	$-\frac{5}{7}$	$x_6$
$u_4$	0	0	0	1	0	0	0	$x_1$
$u_5$	0	0	0	0	1	0	0	$x_2$
$u_6$	0	0	0	0	0	1	0	$x_3$
$\Delta_j$	0	0	0	$+\frac{160}{7}$	$+\frac{100}{7}$	$+\frac{20}{7}$	$+\frac{4180}{7}$ $+z'$	
	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_1$	$x_2$	$x_3$		

Lignes du primal

Il faut multiplier les lignes du dual dont le  $\Delta_j = 0$  et la ligne des  $\Delta_j$  par -1.

Les règles de transformations :

- variables d'écart du problème dual  $\leftrightarrow$  variables principales du problème primal
- variables principales du problème dual  $\leftrightarrow$  variables d'écart du problème primal
- lignes du problème dual  $\leftrightarrow$  colonnes du problème primal
- colonnes du problème dual  $\leftrightarrow$  lignes du problème primal
- $\Delta_j$  du problème dual  $\leftrightarrow$  solutions du problème primal
- solutions du problème dual  $\leftrightarrow$   $\Delta_j$  du problème primal
- $z'$  du problème dual  $\leftrightarrow$   $z$  du problème primal

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	S	
$x_1$	1	0	0	$-3/7$	$4/7$	$-5/7$	$160/7$	
$x_2$	0	1	0	$-8/7$	$-1/7$	$3/7$	$100/7$	
$x_3$	0	0	1	$18/7$	$-3/7$	$2/7$	$20/7$	
$x_4$	0	0	0	-1	0	0	0	
$x_5$	0	0	0	0	-1	0	0	
$x_6$	0	0	0	0	0	-1	0	
$\Delta_j$	0	0	0	$-38/7$	$-3/7$	$-5/7$	$4180/7$	z

De là, nous pouvons en déduire le tableau final

$C_i$	$i$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
14	1	1	0	0	$-3/7$	$4/7$	$-5/7$	$160/7$
17	2	0	1	0	$-8/7$	$-1/7$	$3/7$	$100/7$
12	3	0	0	1	$18/7$	$-3/7$	$2/7$	$20/7$
	$C_j$	14	17	12	0	0	0	
	Sol	$160/7$	$100/7$	$20/7$	0	0	0	
	$\Delta_j$	0	0	0	$-38/7$	$-3/7$	$-5/7$	$4180/7$ z

$$x_1 = 160/7$$

$$x_2 = 100/7$$

$$x_3 = 20/7$$

$$z = 4180/7$$

## 8) Programmation linéaire paramétrée

### a) Paramétrage des coefficients de la fonction économique

$$\text{Max } z = 14x_1 + 17x_2 + 12x_3$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 40 \quad (1)$$

$$10x_1 + 12x_2 + 7x_3 \leq 420 \quad (2)$$

$$6x_1 + 9x_2 + 5x_3 \leq 280 \quad (3)$$

Comment évolue la solution lorsque le coefficient de la variable  $x_3$  varie dans la fonction économique ?

$$\text{Max } z = 14x_1 + 17x_2 + C_3x_3$$

Avec  $C_3 = 12(1 + \lambda)$  avec  $\lambda \in [-1; +\infty[ \rightarrow C_3 \in [0; +\infty[$   
 Tableau final :

$C_i$	$i$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
14	1	1	0	0	$-\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$	$-\frac{5}{7}$	$\frac{160}{7}$
17	2	0	1	0	$-\frac{8}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{100}{7}$
$12(1 + \lambda)$	3	0	0	1	$\frac{18}{7}$	$-\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{20}{7}$

$C_j$	14	17	$12(1 + \lambda)$	0	0	0	
Sol	$\frac{160}{7}$	$\frac{100}{7}$	$\frac{20}{7}$	0	0	0	
$\Delta_j$	0	0	0	$-\frac{38}{7} - \frac{216}{7}\lambda$	$-\frac{3}{7} + \frac{36}{7}\lambda$	$-\frac{5}{7} - \frac{24}{7}\lambda$	$\frac{4180}{7} + \frac{240}{7}\lambda$

$\lambda$	-1	$-\frac{5}{24}$	$-\frac{19}{108}$	$\frac{1}{12}$	$\infty$
$\Delta_4 = -\frac{38}{7} - \frac{216}{7}\lambda$		+	+	-	-
$\Delta_5 = -\frac{3}{7} + \frac{36}{7}\lambda$		-	-	-	+
$\Delta_6 = -\frac{5}{7} - \frac{24}{7}\lambda$		+	-	-	-
Décision		Soit VC4, soit VC6 rentre	VC4 rentre	Solution stable	VC5 entre dans la base

1er cas :

$$\lambda \in \left[-1; -\frac{5}{24}\right[$$

Règle 1 :

$$\Delta_4 > 0$$

$$\Delta_5 < 0$$

$$\Delta_6 \geq 0$$

$$\Delta_4 > \Delta_6$$

Règle 2 :

$$\frac{x_1}{a_{14}} = -\frac{160}{3}$$

$$\frac{x_2}{a_{24}} = -\frac{25}{2}$$

$$\frac{x_3}{a_{34}} = \frac{10}{9}$$

$C_i$	$i$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
14	1	1	0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{70}{3}$
17	2	0	1	$\frac{4}{9}$	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{140}{9}$
0	4	0	0	$\frac{7}{18}$	1	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{10}{9}$
	$C_j$	14	17	$12(1 + \lambda)$	0	0	0	
	Sol	$\frac{70}{3}$	$\frac{140}{9}$	0	$\frac{10}{9}$	0	0	
	$\Delta_j$	0	0	$\frac{19}{9} + 12\lambda$	0	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{9}$	$\frac{5320}{9}$

$z$

Sur l'intervalle  $\lambda \in \left[-1; -\frac{5}{24}\right[$  les  $\Delta_j$  sont tous  $\leq 0 \rightarrow$  FIN

Solution :

$$x_1 = \frac{70}{3}$$

$$x_2 = \frac{140}{9}$$

$$x_3 = 0$$

$$z = \frac{5320}{9}$$

Réponses sans les développements pour les autres cas :

2eme cas :

$$\lambda \in \left]-\frac{5}{24}; -\frac{19}{108}\right]$$

Solution identique au premier cas

3eme cas :

$$\lambda \in \left] -\frac{19}{108}; \frac{1}{12} \right]$$

La solution est stable sur cet intervalle

$$x_1 = \frac{160}{7}$$

$$x_2 = \frac{100}{7}$$

$$x_3 = \frac{20}{7}$$

$$z = \frac{4180}{7} + \frac{240}{7}\lambda$$

4eme cas :

$$\lambda \in \left] \frac{1}{12}; +\infty \right[$$

2 sous cas :

$$\lambda \in \left] \frac{1}{12}; \frac{5}{12} \right]$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 20$$

$$x_3 = 20$$

$$z = 580 + 240\lambda$$

$$\lambda \in \left] \frac{5}{12}; +\infty \right[$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 = 40$$

$$z = 480 + 480\lambda$$

b) paramétrage des seconds membres des contraintes

$$\text{Max } z = 14x_1 + 17x_2 + 12x_3$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 40 \quad (1)$$

$$10x_1 + 12x_2 + 7x_3 \leq 420 \quad (2)$$

$$6x_1 + 9x_2 + 5x_3 \leq 280 \quad (3)$$

On veut faire évoluer le membre de droite de la 3eme inéquation

$$6x_1 + 9x_2 + 5x_3 \leq 280(1 + \gamma) \text{ avec } \gamma \in [-1; +\infty[$$

Conversion en problème dual

$$\text{Min } z' = 40u_1 + 420u_2 + 280(1 + \gamma) u_3$$

$$u_1 + 10u_2 + 6u_3 \geq 14 \quad (1)$$

$$u_1 + 12u_2 + 9u_3 \geq 17 \quad (2)$$

$$u_1 + 7u_2 + 5u_3 \geq 12 \quad (3)$$

Tableau final du problème dual

$C_i$	$i$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
-40	1	1	0	0	$\frac{3}{7}$	$\frac{8}{7}$	$-\frac{18}{7}$	$\frac{38}{7}$
-420	2	0	1	0	$-\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$
$-280(1 + \gamma)$	3	0	0	1	$\frac{5}{7}$	$-\frac{3}{7}$	$-\frac{2}{7}$	$\frac{5}{7}$
$C_j$		-40	-420	$-280(1 + \gamma)$	0	0	0	
Sol		$\frac{38}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{5}{7}$	0	0	0	
$\Delta_j$		0	0	0	$-\frac{160}{7} + 200\gamma$	$-\frac{100}{7} - 120\gamma$	$-\frac{20}{7} - 80\gamma$	$-\frac{4180}{7} - 200\gamma$

$-z'$

$\gamma$	-1	$-\frac{5}{42}$	$-\frac{1}{28}$	$\frac{4}{35}$	$\infty$
$\Delta_4 = -\frac{160}{7} + 200\gamma$	-	-	-	+	
$\Delta_5 = -\frac{100}{7} - 120\gamma$	+	-	-	-	
$\Delta_6 = -\frac{20}{7} - 80\gamma$	+	+	-	-	
Décision	Soit VC5, soit VC6 rentre		VC6 rentre	Solution stable	VC4 entre dans la base

Développons le 4eme cas :

$$\gamma \in \left[-\frac{4}{3}; +\infty\right[$$

Règle 1 : VC4 rentre

Règle 2 : VC3 sort

$C_i$	$i$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
-40	1	1	0	$-\frac{3}{5}$	0	$\frac{5}{7}$	$-\frac{12}{5}$	5
-420	2	0	1	$\frac{4}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1
0	4	0	0	$\frac{7}{5}$	1	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{2}{5}$	1

$C_j$	-40	-420	$-280(1 + \gamma)$	0	0	0	
Sol	5	1	0	1	0	0	
$\Delta_j$	0	0	$32 - 280\gamma$	0	-28	-12	-620 $-z'$

Dans l'intervalle  $\gamma \in \left[-\frac{4}{3}; +\infty\right[$  tous les  $\Delta_j$  sont  $\leq 0$ , la solution est donc stable.

$-z = -620$	$\rightarrow$	$z = 620$
$u_1 = 5$	$\rightarrow$	$x_4 = 0$
$u_2 = 1$	$\rightarrow$	$x_5 = 0$
$u_3 = 0$	$\rightarrow$	$x_6 = -32 + 280\gamma$
$u_4 = 1$	$\rightarrow$	$x_1 = 0$
$u_5 = 0$	$\rightarrow$	$x_2 = 28$
$u_6 = 0$	$\rightarrow$	$x_3 = 12$

$\gamma$ :	-1	$-\frac{2}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{5}{42}$	$-\frac{1}{28}$	$\frac{4}{35}$	$\infty$
$x_1 = 0$	$x_1 = 80 + 280\gamma$	$x_1 = \frac{80}{3} + 280\gamma$	$x_1 = \frac{160}{7} - 200\gamma$	$x_1 = 0$			
$x_2 = 0$	$x_2 = 0$	$x_2 = \frac{40}{3} + \frac{280}{3}\gamma$	$x_2 = \frac{100}{7} + 120\gamma$	$x_2 = 28$			
$x_3 = 56 + 56\gamma$	$x_3 = -40 - 280\gamma$	$x_3 = 0$	$x_3 = \frac{20}{7} + 80\gamma$	$x_3 = 12$			
$z = 672 + 672\gamma$	$z = 640 + 560\gamma$	$z = 600 + 280\gamma$	$z = \frac{4180}{7} + 200\gamma$	$z = 620$			

### 9) Programmation linéaire en nombres entiers

Les variables  $x_i$  prennent leurs valeurs dans  $\mathbb{N}$

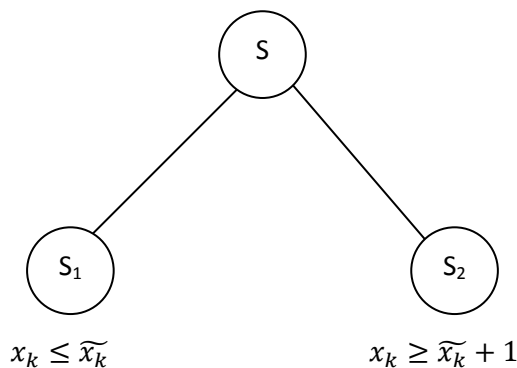
#### La méthode de séparation et évaluation

##### Etape 1 : Résolution du programme linéaire

- Résoudre le programme linéaire en relaxant les contraintes d'intégrité ( $x_i \in \mathbb{R}$ )
- Si la solution est entière  $\rightarrow$  FIN
- Sinon aller à l'étape 2

##### Etape 2 : Séparation

- Choisir une variable  $x_k$  non-entière dans la solution optimale du programme linéaire (on prend celle avec la plus grande partie fractionnaire)
- Partager l'ensemble des solutions admissibles  $S$  en deux sous ensembles  $S_1$  et  $S_2$  selon  $x_k = \tilde{x}_k + f_k$   $\tilde{x}_k$  : partie entière et  $f_k$  : partie fractionnaire





Etape 3 : Evaluation

Pour chaque sous ensembles  $S_1$  et  $S_2$  on détermine la solution optimale (avec  $x_i \in \mathbb{R}$ )

On obtient deux solutions :

- Une solution  $z_1$  pour  $x_k \leq \widetilde{x}_k$
- Une solution  $z_2$  pour  $x_k \geq \widetilde{x}_k + 1$

Etape 4 : Test

- On examine la solution obtenue pour chaque sous ensemble  $S_1$  et  $S_2$
- On fige la solution si :
  - Le sous ensemble donne comme solution l'ensemble vide (pas de solution)
  - Le sous ensemble donne une solution optimale entière
  - Le sous ensemble donne une solution moins bonne que la meilleur solution (entière) déjà trouvée
- Si tous les sous ensembles sont figés, on garde la meilleure solution entière → FIN
- Sinon retourner à l'étape 2 pour tous les sous ensembles non-figés

**Exemple :**

$$\max z = -x_1 + 2x_2$$

$$-4x_1 + 6x_2 \leq 9$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{N}$$

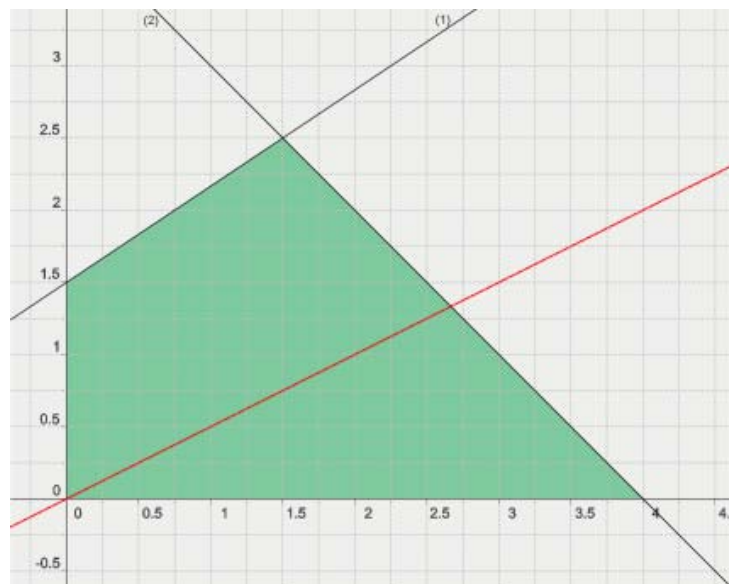
Etape 1 : Résolution du programme linéaire

*(Résolution graphique)*

$$x_1 = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2}$$

$$z = \frac{7}{2}$$



Etape 2 : Séparation

On choisit  $x_2$  pour séparer

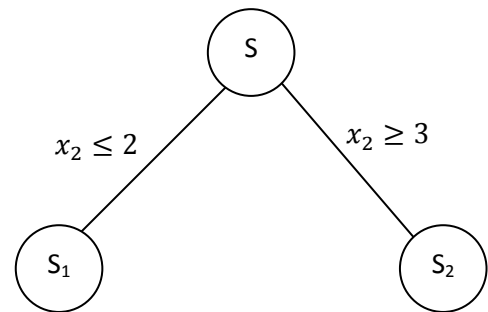
$$x_2 = 2 + \frac{1}{2}$$

$$\widetilde{x}_2 = 2 \text{ et } f_2 = \frac{1}{2}$$

On partage l'ensemble des solutions admissibles en deux sous ensembles.

$S_1$  : ensemble des solutions pour  $x_2 \leq 2$

$S_2$  : ensemble des solutions pour  $x_2 \geq 3$



On obtient deux nouveaux programmes linéaires :

PL1 :

$$\max z = -x_1 + 2x_2$$

$$-4x_1 + 6x_2 \leq 9$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{N}$$

PL2 :

$$\max z = -x_1 + 2x_2$$

$$-4x_1 + 6x_2 \leq 9$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_2 \geq 3$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{N}$$

Etape 3 : Evaluation

On résout PL1 :

$$x_1 = \frac{3}{4}$$

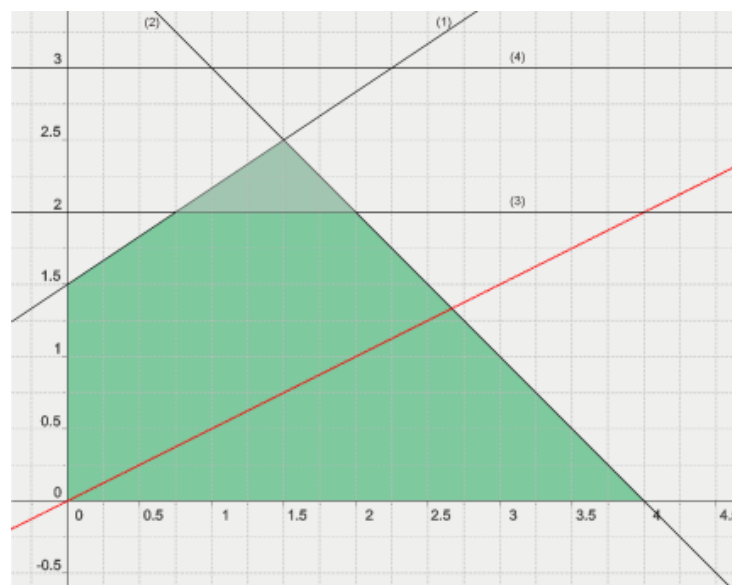
$$x_2 = 2$$

$$z = \frac{13}{4}$$

On résout PL2 :

Il n'y a pas de solution dans ce cas

→  $S_2$  est figée



Etape 4 : Test

On retourne à l'étape 2 car toutes les solutions ne sont pas figées

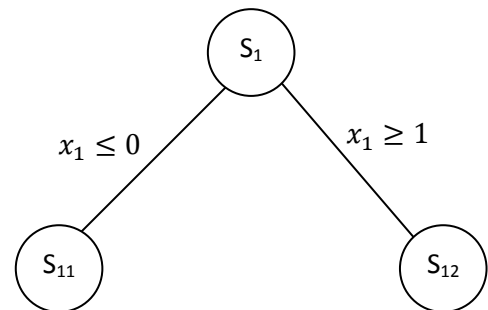
Etape 2 : Séparation

On utilise  $x_1$  pour séparer

$$x_1 = 0 + \frac{3}{4}$$

$S_{11}$  : ensemble des solutions pour  $x_1 \leq 0$

$S_{12}$  : ensemble des solutions pour  $x_1 \geq 1$

PL11 :

$$\max z = -x_1 + 2x_2$$

$$-4x_1 + 6x_2 \leq 9$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_2 \leq 2$$

$$x_1 \leq 0$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{N}$$

PL12 :

$$\max z = -x_1 + 2x_2$$

$$-4x_1 + 6x_2 \leq 9$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_2 \leq 2$$

$$x_1 \geq 1$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{N}$$

Etape 3 : Evaluation

On résout PL11 :

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = \frac{2}{3}$$

$$z = 3$$

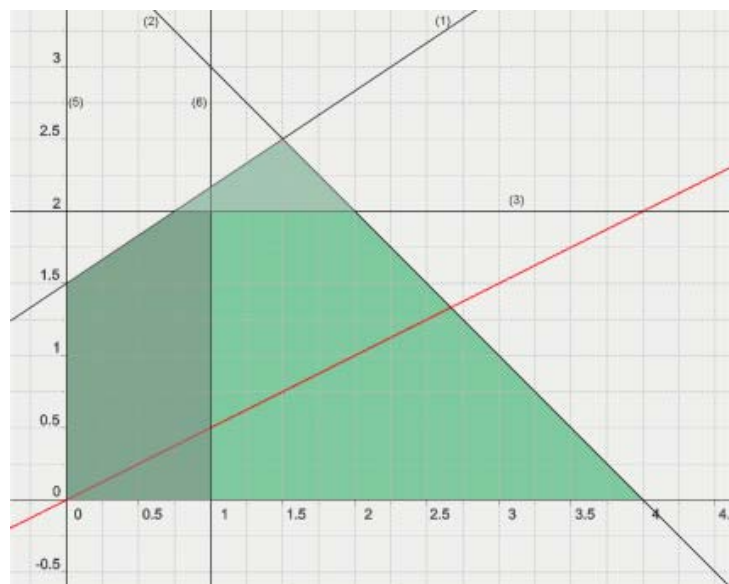
On résout PL12 :

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 2$$

$$z = 3$$

→  $S_{12}$  est figée



Normalement, il faudrait faire encore une itération avec PL111 et PL112 car PL11 donne une solution non figée, mais on passe directement aux résultats :

PL111 :

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 1$$

$$z = 2$$

→  $S_{111}$  est figée

PL112 :

Il n'y a pas de solution dans ce cas →  $S_{112}$  est figée

Etape 4 : Test

Toutes les solutions sont figées → l'algorithme se termine

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 2$$

$$z = 3$$

## Chapitre 2 : Les chaînes de Markov

### 1) Représentation d'une chaîne de Markov

Nœuds : états de la chaîne de Markov

Arc : transition entre les états

$p_{nn'}$  : probabilité de transition de n à n'

Probabilité d'être dans l'état n' à l'instant i+1 :  $p_{n'}(i+1)$

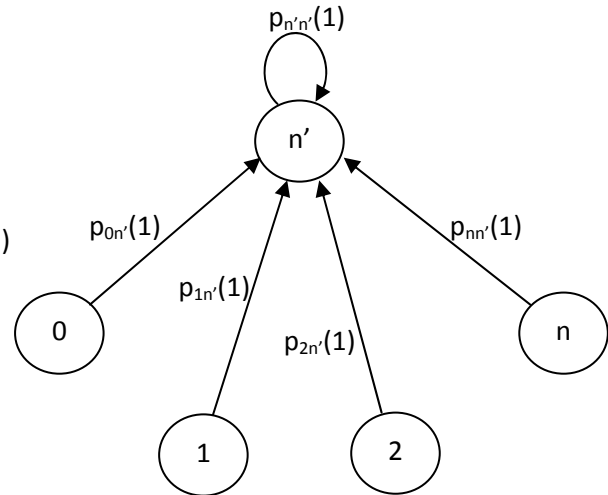
Probabilité d'être dans l'état n à l'instant i :  $p_n(i)$

$$p_0(i+1) = \sum_n (p_n(i) \cdot p_{n0}(1))$$

$$p_1(i+1) = \sum_n (p_n(i) \cdot p_{n1}(1))$$

...

$$p_{n'}(i+1) = \sum_n (p_n(i) \cdot p_{nn'}(1))$$



Vecteur de probabilité :

$$p(i) = |p_0(i), p_1(i), p_2(i), \dots, p_{n'}(i)|$$

$$0 \leq p_n(i) \leq 1 \quad \sum_n p_n(i) = 1$$

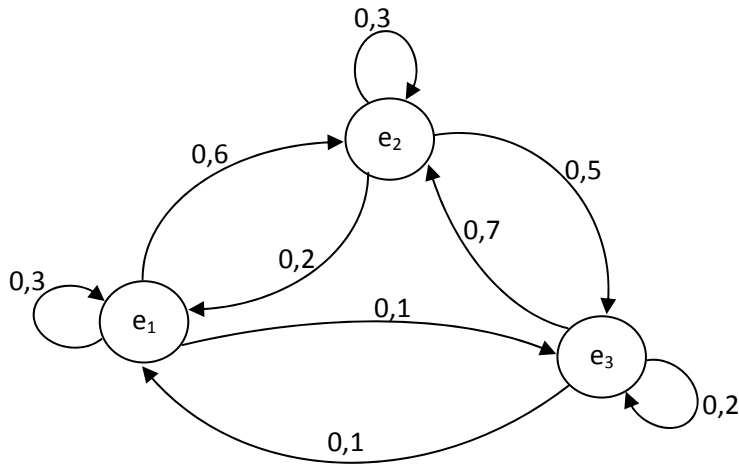
$$p(i+1) = p(i) \cdot T$$

T : matrice de taille  $n' \times n'$  formée des  $p_{nn'}$

$$T = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \dots & p_{0n'} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n'} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n'0} & p_{n'1} & p_{n'2} & \dots & p_{n'n'} \end{pmatrix}$$

$$p(i) = p(0) * T^i$$

Exemple :



	e <sub>1</sub>	e <sub>2</sub>	e <sub>3</sub>
e <sub>1</sub>	0,3	0,6	0,1
e <sub>2</sub>	0,2	0,3	0,5
e <sub>3</sub>	0,1	0,7	0,2

Vecteur d'état  $p(i)$  :

$$p(i) = |p_{e_1}, p_{e_2}, p_{e_3}|$$

Vecteur d'état initial :

$$p(0) = \left| \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right|$$

On peut calculer  $p(1), p(2), \dots, p(i)$  :

$$p(1) = p(0) \times T$$

$$p(2) = p(0) \times T^2$$

$$p(3) = p(0) \times T^3$$

Calcul du vecteur d'état limite :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} p(i) = p$$

$$p(i + 1) = p(i) \cdot T$$

$$\text{Avec } i \rightarrow \infty : p = p \cdot T$$

On peut calculer le vecteur d'état limite en résolvant le système d'équation

On peut aussi calculer le vecteur d'état limite en faisant :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} T^i = \begin{vmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \dots & p_{n'} \\ p_0 & p_1 & p_2 & \dots & p_{n'} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_0 & p_1 & p_2 & \dots & p_{n'} \end{vmatrix}$$

$p_0, p_1, p_2, \dots, p_{n'}$  sont les composantes du vecteur d'état limite

Dans le cas de l'exemple :

$$T = \begin{vmatrix} 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \end{vmatrix}$$

$$p = |p_1, p_2, p_3|$$

$$|p_1, p_2, p_3| = |p_1, p_2, p_3| \cdot \begin{vmatrix} 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \end{vmatrix}$$

$$p = |0.19, 0.49, 0.32|$$

## 2) Classification des états d'une chaîne de Markov

### Chaîne de Markov irréductible :

Une chaîne de Markov est dite irréductible si tous les états communiquent entre eux

### Etats absorbants :

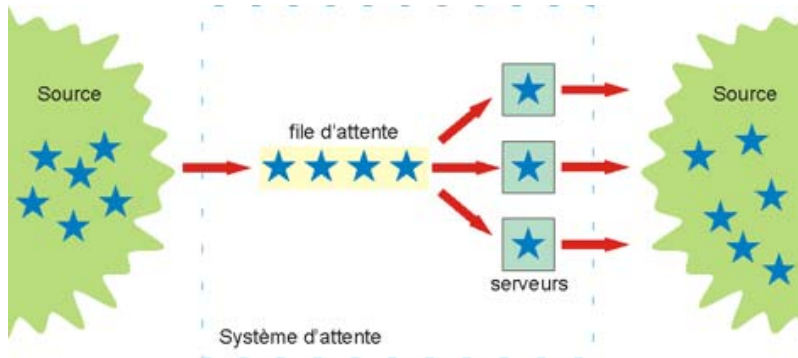
Un état est absorbant si  $p_{ii} = 1$

### Etats périodiques :

Un état est périodique s'il ne peut réapparaître qu'à des intervalles réguliers équivalents

## Chapitre 3 : Les files d'attente

### 1) Généralités



Les paramètres :

- 1) Le nombre de serveurs :  $S$
- 2) Le nombre de positions d'attente :  $K+S$  (avec  $K$  nombre de position dans la file d'attente)
- 3) Le type de service appliqué au modèle d'attente : PAPS (FCFS)
- 4) Le nombre d'unités dans la source :  $M$
- 5) La nature des arrivées : elles suivent une loi de Poisson

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} \cdot e^{-\lambda t}$$

$\lambda$  : Nombre moyen d'arrivées dans le système d'attente par unité de temps

$P_n(t)$  : Probabilité d'observer  $n$  arrivées dans le système d'attente sur un intervalle de temps  $t$

Exemple :  $\lambda=10$  arrivées par heure

$$P_3(1h) = \frac{10^3}{3!} = 7.5 * 10^{-3}$$

$$P_{10}(1h) = 0.125$$

- 6) Nature des services : ils suivent une loi exponentielle
- $\Theta$  : Variable aléatoire qui représente l'intervalle de temps séparant deux services
- $$P(\Theta < \theta) = 1 - e^{-\mu\theta}$$
- $\mu$ : nombre moyen de services par unité de temps

Exemple :  $\mu=2$  services par heure

$$P(\Theta < 0.1h) = 1 - e^{-2*0.1} = 0.18$$

$$P(\Theta < 2h) = 1 - e^{-2*2} = 0.99$$



## 2) File d'attente à un serveur

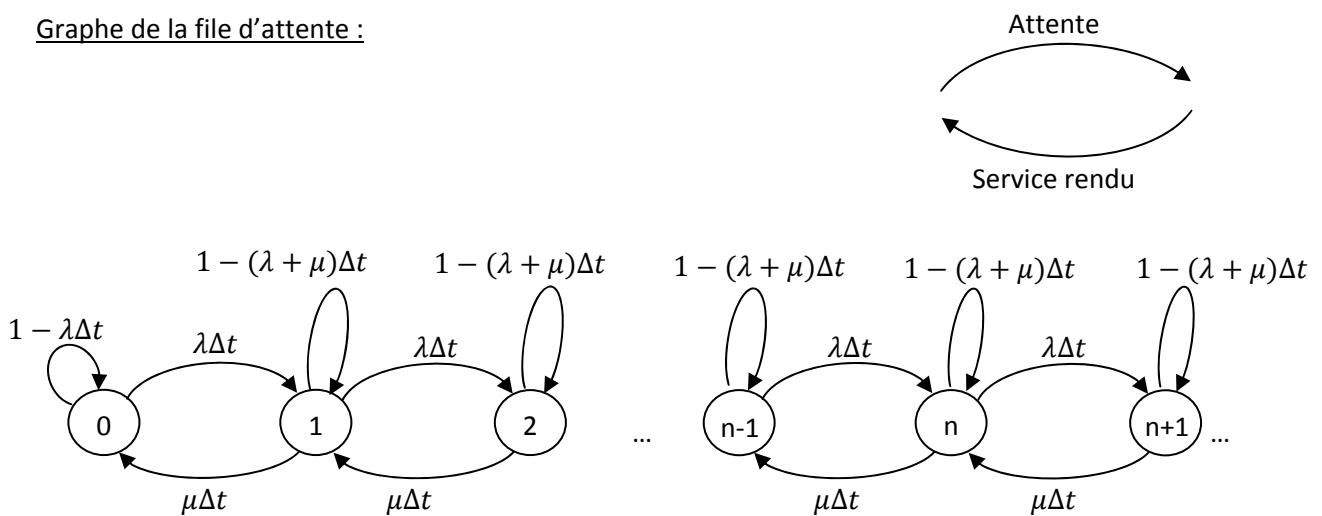
### Les paramètres :

- $M=\infty$
- $K=\infty$
- $S=1$
- PAPS
- Les arrivées suivent une loi de Poisson de  $t * \lambda$
- Les services suivent une loi exponentielle de  $t * \mu$

### Hypothèse :

Le nombre moyen d'arrivées par unité de temps ( $\lambda$ ) est inférieur au nombre moyen de services par unité de temps.

### Graphes de la file d'attente :



### a) Probabilité $P_n$ du nombre d'unités dans le système d'attente

$$P_0(t + \Delta t) = P_0(t) \times (1 - \lambda\Delta t) + P_1(t) \times \mu\Delta t$$

$$P_0(t + \Delta t) - P_0(t) = -P_0(t) \times \lambda\Delta t + P_1(t) \times \mu\Delta t$$

$$\frac{P_0(t + \Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} = -P_0(t) \times \lambda + P_1(t) \times \mu$$

$$P_n(t + \Delta t) = P_{n-1}(t) \times \lambda\Delta t + P_n(t) \times (1 - (\lambda + \mu)\Delta t) + P_{n+1}(t) \times \mu\Delta t$$

$$P_n(t + \Delta t) - P_n(t) = P_{n-1}(t) \times \lambda\Delta t - P_n(t) \times (\lambda + \mu)\Delta t + P_{n+1}(t) \times \mu\Delta t$$

$$\frac{P_n(t + \Delta t) - P_n(t)}{\Delta t} = P_{n-1}(t) \times \lambda - P_n(t) \times (\lambda + \mu) + P_{n+1}(t) \times \mu$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{P_n(t + \Delta t) - P_n(t)}{\Delta t} \right) = P'_n(t)$$

$$P'_0(t) = -P_0(t) \times \lambda + P_1(t) \times \mu$$

$$P'_n = P_{n-1}(t) \times \lambda - P_n(t) \times (\lambda + \mu) + P_{n+1}(t) \times \mu$$

En régime permanent :

$$P_n(t) = P_n$$

$$P'_0 = 0$$

$$-P_0 \times \lambda + P_1 \times \mu = 0$$

$$P_{n-1} \times \lambda - P_n \times (\lambda + \mu) + P_{n+1} \times \mu = 0$$

$$P_1 = \left( \frac{\lambda}{\mu} \right) \cdot P_0$$

$$P_{n-1} \cdot \lambda - P_n \cdot (\lambda + \mu) + P_{n+1} \cdot \mu = 0$$

Dans le cas où  $n = 1$

$$P_0 \cdot \lambda - P_1 \cdot (\lambda + \mu) + P_2 \cdot \mu = 0$$

$$P_2 = -P_0 \cdot \left( \frac{\lambda}{\mu} \right) + P_1 \cdot \left( \frac{\lambda + \mu}{\mu} \right) = P_0 \cdot \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^2$$

Dans le cas où  $n = 2$

$$P_3 = P_0 \cdot \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^3$$

Règle générale :

$$P_n = P_0 \cdot \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n$$

Calcul de  $P_0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_0 \cdot \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n = 1$$

$$P_0 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = 1$$

Rappel :

$$\sum_{n=0}^N \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \frac{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N+1}}{1 - \frac{\lambda}{\mu}}$$

Lorsque  $\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) < 1$  et que  $N \rightarrow \infty$  alors

$$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N+1} \rightarrow 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\mu}}$$

$$P_0 \cdot \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} = 1$$

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

$$\psi = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$P_0 = 1 - \psi$$

$$P_n = \psi^n (1 - \psi)$$

**b) Probabilité d'avoir dans le système un nombre d'unités N inférieur à n**

$$P(N \leq n) = \sum_{i=0}^n P_i$$

$$P(N \leq n) = \sum_{i=0}^n (P_0 \cdot \psi^i)$$

$$P(N \leq n) = P_0 \cdot \sum_{i=0}^n \psi^i$$

$$P(N \leq n) = (1 - \psi) \cdot \frac{1 - \psi^{n+1}}{1 - \psi}$$

$$P(N \leq n) = 1 - \psi^{n+1}$$

### c) Nombre moyen d'unités dans le système d'attente $\bar{n}$

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P_n$$

$$\bar{n} = \frac{\psi}{1 - \psi}$$

### d) Nombre moyen d'unités dans la file d'attente $\bar{v}$

$$\bar{v} = \frac{\psi^2}{1 - \psi}$$

## 3) File d'attente à plusieurs serveurs

### Les paramètres :

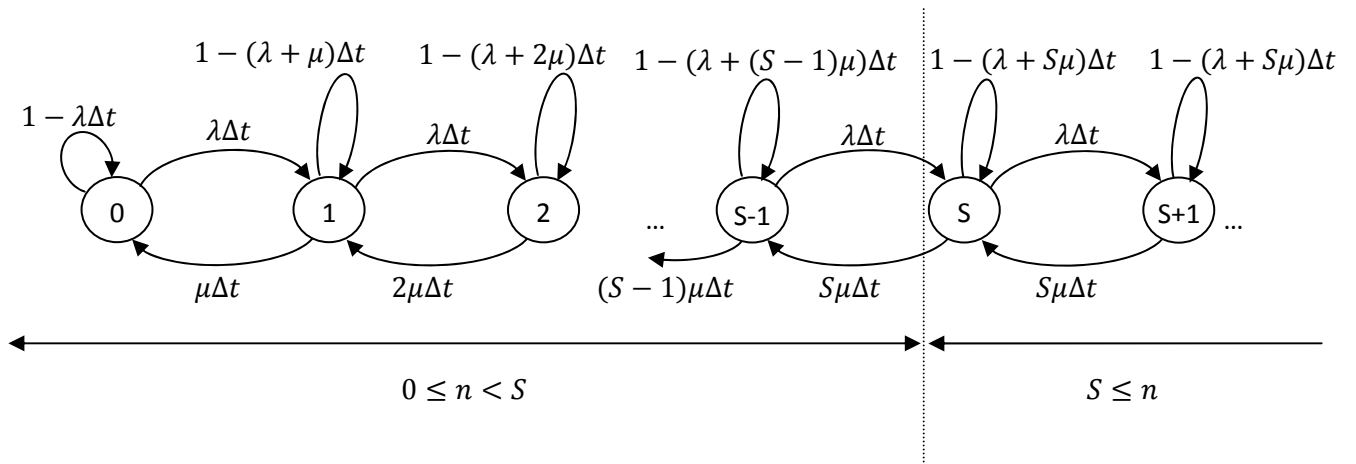
- M éléments dans la source =  $\infty$
- K positions d'attente =  $\infty$
- S > 1
- PAPS
- Les arrivées suivent une loi de Poisson de ( $\lambda$ )
- Les services suivent une loi exponentielle de ( $\mu$ )

### Hypothèse :

$$\lambda < \mu S \text{ ou } \frac{\lambda}{\mu S} < 1$$

Le nombre moyen d'arrivées par unité de temps est inférieur au nombre moyen de services par unité de temps.

Graphes du système d'attente :



**a) Probabilité  $P_n$  du nombre d'unités dans le système d'attente**

$$P_0(t + \Delta t) = P_0(t) \times (1 - \lambda\Delta t) + P_1(t) \times \mu\Delta t$$

Pour  $1 \leq n < S$  :

$$P_n(t + \Delta t) = P_{n-1}(t) \times \lambda\Delta t + P_n(t) \times (1 - (\lambda + n\mu)\Delta t) + P_{n+1}(t) \times (n + 1)\mu\Delta t$$

Pour  $n \geq S$  :

$$P_n(t + \Delta t) = P_{n-1}(t) \times \lambda\Delta t + P_n(t) \times (1 - (\lambda + S\mu)\Delta t) + P_{n+1}(t) \times S\mu\Delta t$$

En régime permanent :

$$\begin{aligned} P_n(t) &= P_n \\ P'_n(t) &= 0 \\ P'_0 &= 0 \end{aligned}$$

$$-\lambda P_0 + \mu P_1 = 0$$

$$P_{n-1} \times \lambda - P_n \times (\lambda + n\mu) + P_{n+1} \times (n + 1)\mu = 0 \quad (\text{pour } 1 \leq n < S)$$

$$P_{n-1} \times \lambda - P_n \times (\lambda + S\mu) + P_{n+1} \times S\mu = 0 \quad (\text{pour } S \leq n)$$

1<sup>er</sup> cas :  $1 \leq n < S$

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu} \cdot P_0$$

Si  $n=1$  :

$$P_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \cdot P_0$$

Si  $n=2$  :

$$P_3 = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 \cdot P_0$$

Cas général :

$$P_n = \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot P_0$$

2<sup>ème</sup> cas :  $S \leq n$

$$P_n = \frac{1}{S^{n-S} \cdot S!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot P_0$$

Calcul de  $P_0$  :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P_n = 1$$

$$P_0 + P_0 \cdot \psi + \frac{1}{2!} \cdot P_0 \cdot \psi^2 + \dots + \frac{1}{(S-1)!} \cdot P_0 \cdot \psi^{S-1} + \frac{1}{S!} \cdot P_0 \cdot \psi^S + \frac{1}{S! \cdot S} \cdot P_0 \cdot \psi^{S+1} + \dots = 0$$

$$P_0 \cdot \left[ \sum_{n=0}^{S-1} \frac{\psi^n}{n!} + \frac{\psi^S}{S!} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{\psi}{S}\right)^k \right] = 1$$

$$P_0 \cdot \left[ \sum_{n=0}^{S-1} \frac{\psi^n}{n!} + \frac{\psi^S}{S!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\psi}{S}} \right] = 1$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{S-1} \left(\frac{\psi^n}{n!}\right) + \frac{\psi^S}{S!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\psi}{S}}}$$

### b) Probabilité d'attendre

$$P(N \geq S) = \sum_{n=S}^{+\infty} \left[ P_0 \cdot \frac{1}{S^{n-S} \cdot S!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \right]$$

$$P(N \geq S) = P_0 \cdot \frac{S^S}{S!} \cdot \sum_{n=S}^{+\infty} \left(\frac{\psi}{S}\right)^n$$

$$P(N \geq S) = P_0 \cdot \frac{S^S}{S!} \cdot \sum_{n=S}^{+\infty} \left(\frac{\psi}{S}\right)^n$$

$$P(N \geq S) = P_0 \cdot \frac{S^S}{S!} \cdot \left[ \frac{1}{1 - \frac{\psi}{S}} + \frac{1 - \left(\frac{\psi}{S}\right)^S}{1 - \psi} \right]$$

$$P(N \geq S) = P_0 \cdot \frac{\psi^S}{S! \cdot \left(1 - \frac{\psi}{S}\right)} = P_a$$

**c) Nombre moyen d'unités dans la file d'attente  $\bar{v}$**

$$\bar{v} = \frac{\psi P_a}{S - \psi}$$

$$\bar{v} = P_0 \cdot \frac{\psi^{S+1}}{(S-1)! \cdot (S - \psi)^2}$$

**d) Nombre moyen d'unités dans le système d'attente  $\bar{n}$**

$$\bar{n} = \psi \left( 1 + \frac{P_a}{S - \psi} \right)$$

**e) Temps moyen d'attente dans la file  $\bar{t}_f$**

$$\bar{t}_f = \frac{\bar{v}}{\lambda} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{P_a}{S - \psi}$$

**f) Temps moyen d'attente dans le système  $\bar{t}_s$**

$$\bar{t}_s = \frac{\bar{n}}{\lambda} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{P_a}{S - \psi} + \frac{1}{\mu}$$

## Chapitre 4 : Problèmes d'ordonnancement

### 1) Problèmes d'ordonnancement avec contrainte de ressources

#### Contrainte de précédence :

La tâche C ne peut commencer que si les tâches A et B sont terminées.

⇒ Méthodes MPM ou PERT

#### Contrainte de ressources :

La tâche C ne peut commencer que si les tâches A et B sont terminées, et qu'il y a suffisamment de ressources disponibles pour qu'elle s'exécute.

⇒ Méthode Sérielle (méthode de liste)

Le but est de déterminer la durée de l'ordonnancement.

#### Notations :

- $I$  : ensemble des tâches classées selon un ordre de priorité
- $U$  : ensemble des tâches traitées
- $\bar{U}$  : complément de  $U$
- $t$  : variable qui représente le temps
- $t_i$  : date de réalisation au plus tôt de la tâche  $i$

#### Algorithme :

$U = \{\emptyset\}$

$t = 0$

**Tant que**  $U \neq I$  **faire**

$S \leftarrow$  (sous ensemble des tâches de  $\bar{U}$  disponibles à l'instant  $t$ )

**si**  $S \neq \{\emptyset\}$  **alors**

Choisir dans  $S$  la tâche  $i$  de plus grande priorité

$U = U + \{i\}$

$t_i = t$

**sinon**

Déterminer le plus petit instant  $t$  où une tâche de  $\bar{U}$  devient disponible

**fin si**

**fin tant que**

#### Remarques :

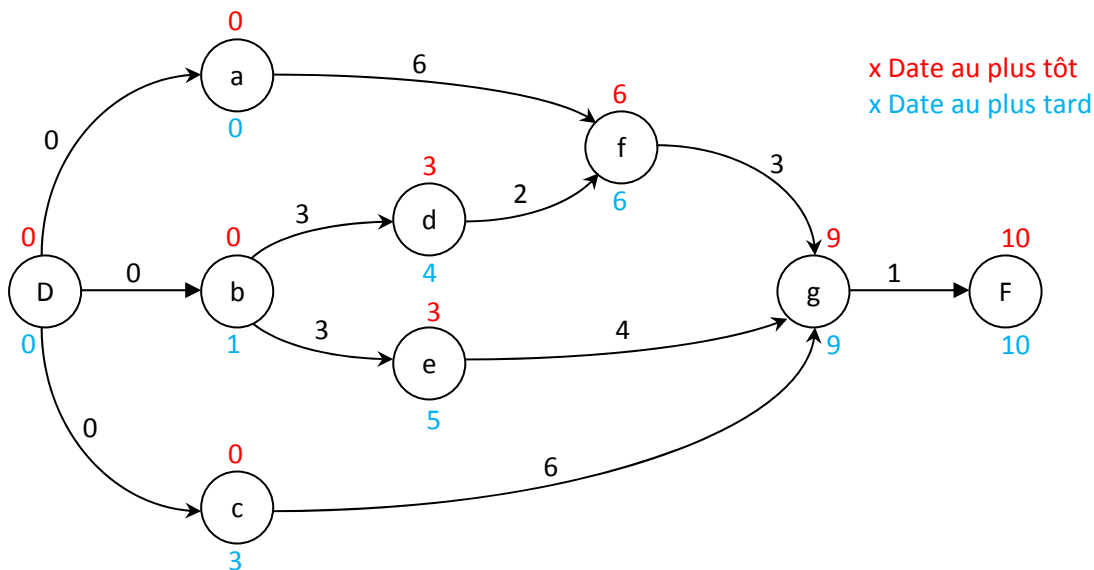
- Une tâche est disponible si les tâches qui la précède sont achevées et s'il y a suffisamment de ressources pour l'exécuter
- On ordonne les tâches dans le sens des dates au plus tard croissantes.



Exemple :

Tâche	Durée	Ressource	Précédence
a	6	3	-
b	3	2	-
c	6	1	-
d	2	1	b
e	4	3	b
f	3	3	d, a
g	1	2	f, e, c

Les ressources disponibles à un instant donné sont limitées à 5.



$I = \{a, b, c, d, e, f, g\}$   
 $U = \{\emptyset\}$

$t = 0$  5 Unités de Ressource (UR) disponibles  
 $S = \{a, b, c\}$  (Tâches disponibles : a,b,c)

On choisit a (plus prioritaire)  
 $t_a = 0 ; U = \{a\}$   
 a prend 3 UR → il reste 2 UR

$t = 0$  2 UR disponibles

$S = \{b, c\}$   
 On choisit b  
 $t_b = 0 ; U = \{a, b\}$   
 b prend 2 UR → il reste 0 UR

$t = 3$  b se termine et libère 2 UR

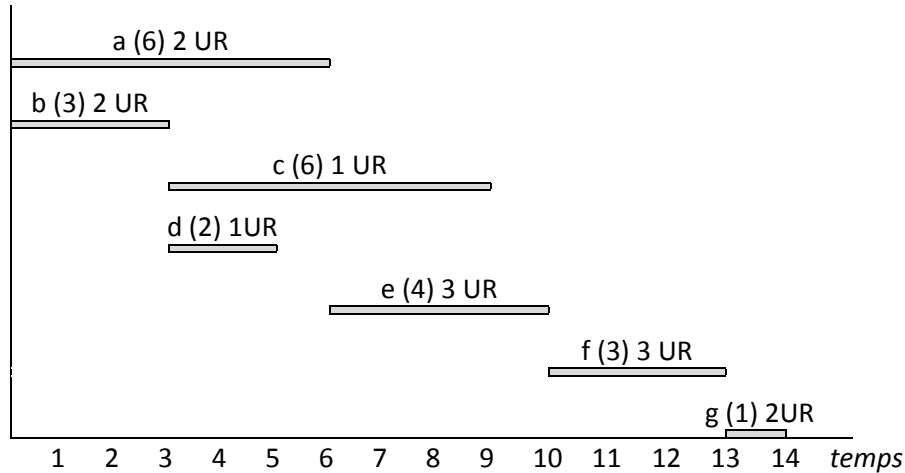
2 UR disponibles  
 $S = \{c, d\}$   
 On choisit c  
 $t_c = 3 ; U = \{a, b, c\}$   
 c prend 1 UR → il reste 1 UR

- $t = 3$  1 UR disponible  
 $S = \{d\}$   
 On choisit  $d$   
 $t_d = 3 ; U = \{a, b, c, d\}$   
 $d$  prend 1 UR → il reste 0 UR
- $t = 5$   $d$  se termine et libère 1 UR  
 1 UR disponible  
 $S = \{\emptyset\}$  (Aucune tâche n'est disponible)
- $t = 6$   $a$  se termine et libère 3 UR  
 4 UR disponibles  
 $S = \{e, f\}$   
 On choisit  $e$   
 $t_e = 6 ; U = \{a, b, c, d, e\}$   
 $e$  prend 3 UR → il reste 1 UR
- $t = 9$   $c$  se termine et libère 1 UR  
 2 UR disponibles  
 $S = \{\emptyset\}$  (Aucune tâche n'est disponible)
- $t = 10$   $e$  se termine et libère 3 UR  
 5 UR disponibles  
 $S = \{f\}$   
 On choisit  $f$   
 $t_f = 10 ; U = \{a, b, c, d, e, f\}$   
 $f$  prend 3 UR → il reste 2 UR
- $t = 13$   $f$  se termine et libère 3 UR  
 5 UR disponibles  
 $S = \{g\}$   
 $t_g = 13 ; U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$

Ressources dispo

5	a	a	a	a	a	a	e	e	e	e	f	f	f	g	
4	a	a	a	a	a	a	e	e	e	e	f	f	f	g	
3	a	a	a	a	a	a	e	e	e	e	f	f	f		
2	b	b	b	c	c	c	c	c	c						
1	b	b	b	d	d										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	temps

tâches



## 2) Problèmes d'ordonnancement sur $M$ machines

### a) Ordonnancement de $N$ tâches sur $M$ machines identiques

- $N$  tâches morcelables de durée  $P_1, P_2, \dots, P_N$
- $M$  machines
- Une tâche  $i$  s'exécute dans un intervalle de temps  $[a_i, d_i]$
- La tâche  $i$  est disponible à  $t = a_i$
- La tâche  $i$  doit d'achever à  $t = d_i$

Exemple :

	$a$	$b$	$c$	$d$
$a_i$	0	0	0	2
$p_i$	2	2	4	2
$d_i$	5	3	4	5

Avec  $M = 2$

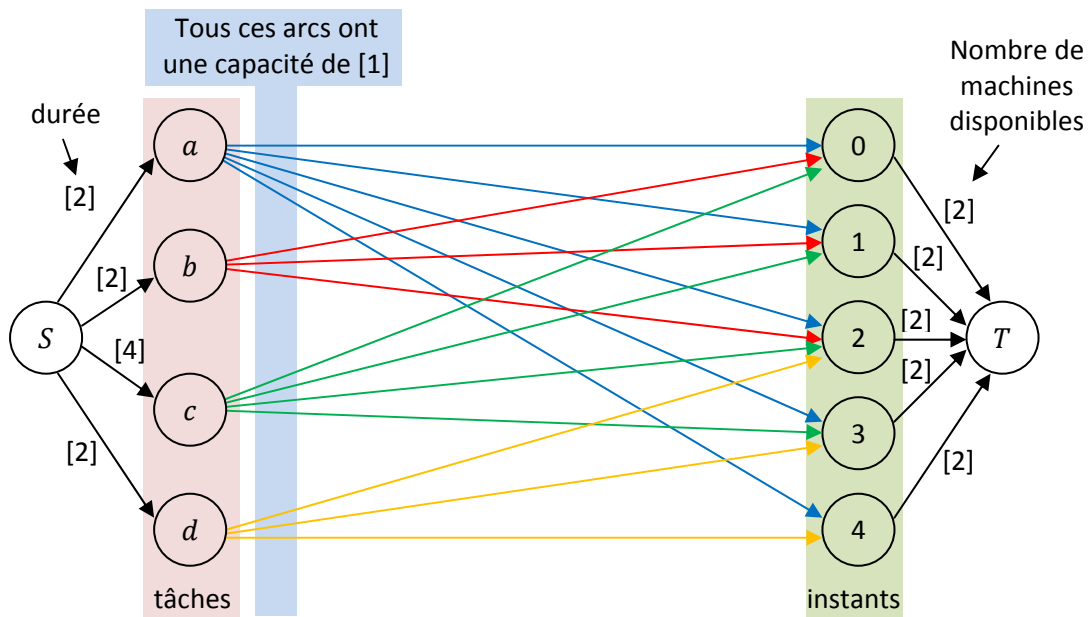
$M_1$	C	C	C	C	A	
$M_2$	B	B	A	D	D	
	0	1	2	3	4	5

Méthode :

1. Modélisation du problème par un réseau de transport
2. Application de l'algorithme de Ford-Fulkerson sur le réseau de transport

Etape 1 : La modélisation

On relie une tâche  $i$  à un instant  $t$  si la tâche  $i$  peut s'exécuter dans l'intervalle de temps  $[a_i, d_i]$



Etape 2 : Algorithme de Ford-Fulkerson

cf. cours de moca B1

$M_1$	B	B	A	C	A	
$M_2$	C	C	C	D	D	
	0	1	2	3	4	5

### b) Ordonnement de $N$ tâches non interruptibles de durée identique sur $M$ machines identiques

- $N$  tâches non interruptibles de durée  $p$  ( $p=1$ )
- $M$  machines identiques
- Les contraintes de précédence sur les tâches forment un graphe convergent (Chaque nœud possède au plus un successeur)

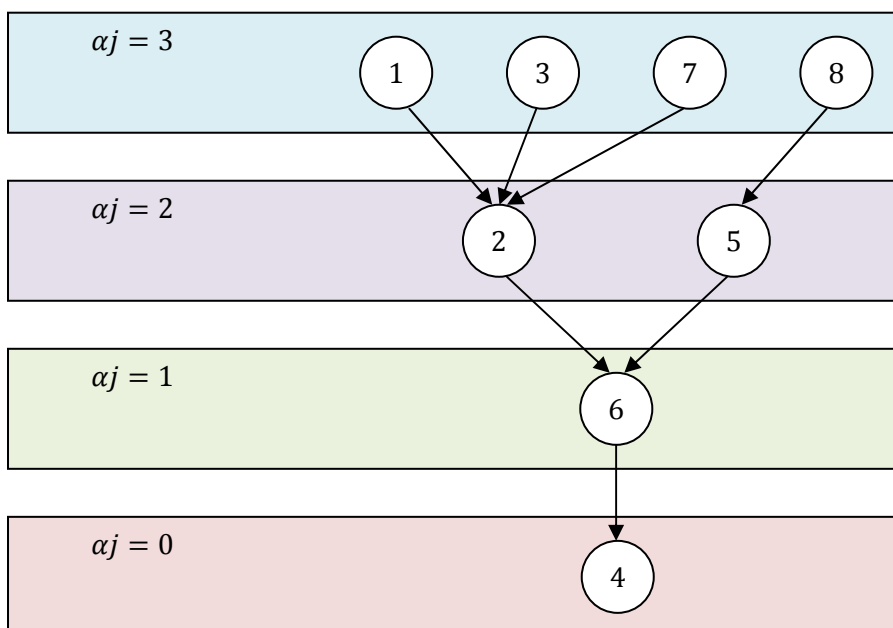
Le but est de minimiser la durée de l'ordonnement.

#### Méthode :

1. On attribue un ordre de priorité à chaque tâche
  - la valeur  $\alpha_j = 0$  à toute tâche qui n'a pas de successeur direct
  - la valeur  $\alpha_j = \alpha_k + 1$  où  $k$  est le successeur direct de  $j$
2. On place les tâches non disponibles sur les machines dans l'ordre de priorité décroissant (une tâche est disponible si toutes les valeurs qui la précèdent sont achevées)

#### Exemple :

- 8 tâches de durée égale à 1
- 3 machines



$L = \{1, 3, 7, 8, 2, 5, 6, 4\}$

<i>M1</i>	1	8	5	6	4	
<i>M2</i>	3	2				
<i>M3</i>	7					
	0	1	2	3	4	5

La durée totale de l'ordonnancement est de 5.